圏の Cauchy 完備化

K.Hirata

December 3, 2022

概要

この pdf は 圏論 Advent Calendar 2022 の 3 日目のエントリとして書かれました. 当初はギャグ記事を書いてハードルを下げようと目論んでいたのですが, 書き始めるといつの間にか信じられないほど敷居の高い記事になってしまい, 大変反省しています. 許してください. この記事では $\overline{\mathbb{R}}_+$-豊穣圏として距離空間を捉えることで, Cauchy 完備性が圏論的に特徴づけられることを示し, その特徴づけを一般化することで, 一般の $\mathcal{V}$-豊穣圏における Cauchy 完備性を定義します. ところで環 $\mathbb{Q}$ は $\mathbf{Ab}$-豊穣圏として見れますが, 一体 $\mathbb{Q}$ の Cauchy 完備化は何線形空間全体になってしまうのでしょうか...!

目次

1 Lawvere 距離空間

1.1 距離空間と $\overline{\mathbb{R}}_+$-豊穣圏

距離空間とは集合 $|X|$ と, 任意の 2 点 $x, y \in |X|$ に対して非負実数 $X(x, y)$ を与える関数 X の組であって, 次を満たすものであった.

(i) $X(x, y) = X(y, x)$,

(ii) $X(y, z) + X(x, y) \geq X(x, z)$,

(iii) $X(x, x) = 0$,

(iv) $X(x, y) = 0 \quad \Rightarrow \quad x = y$.

Lawvere **距離空間**とは, $X(x,y)$ の値として ∞ をとることも許し, (ii)(iii) の条件だけ課し, (i)(iv) を課さない, 一般化された距離空間をいう．(ii) の条件は, 圏論における合成 $\circ_{abc}\colon \mathcal{C}(c,b)\times\mathcal{C}(a,b)\to\mathcal{C}(a,c)$ と似ていて, (iii) の条件は単位射 $\mathrm{id}_a\colon \{*\}\to\mathcal{C}(a,a)$ と似ていることに注意する．すると, 通常の順序と逆の順序を入れた半順序集合 $\mathbb{R}_+\cup\{\infty\}$ を特に圏とみなし, テンソル積を加法 $+$ で入れた monoidal closed category を $\overline{\mathbb{R}}_+$ で定義すれば, Lawvere 距離空間は $\overline{\mathbb{R}}_+$-豊穣圏と一致することがわかる．$\overline{\mathbb{R}}_+$ の closed structure は $\infty-\infty=0$ と考えれば, $[u,v]=\max\{0,v-u\}$ で定まる．詳しくは [alg22] の 10 章を参照すると良い．ちなみに ∞ を加えた理由は, monoidal 圏 $\overline{\mathbb{R}}_+$ を完備にするため．

$\overline{\mathbb{R}}_+$ は半順序なので, $\overline{\mathbb{R}}_+$ の図式は常に可換である．$\overline{\mathbb{R}}_+$ において $I\to r$ なる射があるのは $0\geq r$ すなわち $r=0$ のときである．よって $\overline{\mathbb{R}}_+$-豊穣圏 X の object a と b が同型になるのは, underlying category の射 $a\not\rightarrow b$ と $b\not\rightarrow a$ があるときなので $X(a,b)=X(b,a)=0$ となることと同値．[*1]

$\overline{\mathbb{R}}_+$-豊穣圏の間の $\overline{\mathbb{R}}_+$-**関手** $f\colon X\to Y$ は, 写像 $|X|\to|Y|$ と大小関係 $f_{ab}\colon X(a,b)\geq Y(f(a),f(b))$ であって, 特に他に条件は発生しないので, 単に**非拡大的な写像**のことである．

1.2 Weighted Colimit

$\overline{\mathbb{R}}_+$-豊穣圏における weighted [co]limit を調べておく．先に, [co]end を見ておこう．$X\otimes Y^{\mathrm{op}}\to\overline{\mathbb{R}}_+$ の形の functor を特に *profunctor* と呼び, $X\nrightarrow Y$ と書くことにする．

Proposition 1.1. *Profunctor* $T\colon X\nrightarrow X$ *の end と coend はそれぞれ* sup *と* inf *で次のように計算される．*

$$\int_{x\in X} T(x,x) = \sup_{x\in X} T(x,x)$$
$$\int^{x\in X} T(x,x) = \inf_{x\in X} T(x,x)$$

Proof. $\overline{\mathbb{R}}_+$ の任意の図式は可換なのだから, 自然性は情報を持たない．ゆえに $r\in\overline{\mathbb{R}}_+$ として wedge $r\to T$ や cowedge $T\to r$ はそれぞれ任意の $x\in X$ に対して $r\geq T(x,x)$, $T(x,x)\geq r$ であるときにただ一つ存在する．よって普遍的なものは単に sup, inf になることがわかる． □

End が分かったので, 関手圏に入る hom object がわかる．$f,g\colon X\to Y$ を非拡大的写像とする．$[X,Y](f,g)$ は $\int_{x\in X} Y(fx,gx)$ であるから, $\sup_{x\in X} Y(fx,gx)$ となる．つまり豊穣圏としてみたとき, 関数空間に入れるべき距離は sup になっている．

Weighted colimit は end が sup であることから次を満たすようなものであることがわかる．

Proposition 1.2. $\Phi\colon X^{\mathrm{op}}\to\overline{\mathbb{R}}_+$ *と* $f\colon X\to Y$ *を非拡大的写像とする．このとき任意の* $x\in X$ *について* $Y(fx,\mathrm{colim}^{\Phi}f)\leq\Phi x$ *を満たす．*

Proof. Y の任意の元 y について, $Y(\mathrm{colim}^{\Phi}f,y)=[X^{\mathrm{op}},\overline{\mathbb{R}}_+](\Phi-,Y(f-,y))=\sup_{x\in X}[\Phi x,Y(fx,y)]$ を満たすから, 特に $y=\mathrm{colim}^{\Phi}f$ のとき $0=\sup_{x\in X}[\Phi x,Y(fx,\mathrm{colim}^{\Phi}f)]$. よって任意の $x\in X$ について $[\Phi x,Y(fx,\mathrm{colim}^{\Phi}f)]=0$, すなわち $Y(fx,\mathrm{colim}^{\Phi}f)\leq\Phi x$. □

[*1] underlying category の射の記法は [alg22] に倣った．

つまり weight Φ は各 $x \in X$ について, cocone の頂点が入るべき fx を中心とする Ball の半径 Φx を指定している.

Example 1.3. 通常の距離空間 $\mathbb{R}$ を $\overline{\mathbb{R}}_+$-豊穣圏とみなす. これは $\overline{\mathbb{R}}_+$ に入っている距離とは大きく異なることに注意せよ. また, 2 点 a, b からなる距離空間 X で $X(a,b) = X(b,a) = \infty$ なるものをとる. X からの非拡大的写像は単に 2 つの元の選択になる. $\Phi\colon X^{\mathrm{op}} \to \overline{\mathbb{R}}_+$ と $f\colon X \to \mathbb{R}$ に対して, $\mathrm{colim}^{\Phi} f$ が存在するための条件を考えよう. すなわち, ある実数 c が存在して, 任意の実数 x に対して $|c-x| = \max\{0, |fa-x| - \Phi a, |fb-x| - \Phi b\}$ が成り立つ条件を考える.

もし $\Phi a = \infty$ を満たすなら, $\Phi b = 0$ であるときだけ f の Φ-colimit は存在し, このとき fb になる. $\Phi b = \infty$ のときも同様である.

Φa と Φb が共に実数であるときを考える. 対称性により $fa \le fb$ を仮定しておく. このとき, f の Φ-colimit c が存在すれば, 十分に大きい実数 M と十分に小さい実数 m をとると

$$
\begin{aligned}
M - c &= \max\{M - (fa + \Phi a), M - (fb + \Phi b)\} \\
c - m &= \max\{(fa - \Phi a) - m, (fb - \Phi b) - m\}
\end{aligned}
$$

を満たすので, $fb - fa = \Phi a + \Phi b$ となる必要がある. 逆にこれをみたすとき, $c = fa + \Phi a = fb - \Phi b$ が f の Φ-colimit になる. ■

Example 1.4. $\overline{\mathbb{R}}_+$ の colimit は非拡大的写像 $\Phi\colon X^{\mathrm{op}} \to \overline{\mathbb{R}}_+$, $f\colon X \to \overline{\mathbb{R}}_+$ に対して, $\mathrm{colim}^{\Phi} f = \int^{x \in X} \Phi x \otimes fx = \inf_{x \in X}(\Phi x + fx)$ と計算できる. 同様に, $\overline{\mathbb{R}}_+$ の limit は $\sup_{x \in X}[\Phi x, fx]$ になることがわかる. ■

2 Cauchy 列

Lawvere 距離空間においても、次の通常の意味で *Cauchy* **列** $\{x_n\}$ を定義する.

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_{>0},\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n, m \ge N,\ X(x_n, x_m) \le \varepsilon.$$

さらに点列 $\{x_n\}$ が点 x に**収束する**とは, 次を満たすこととする.

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R} > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \ge N,\ X(x_n, x), X(x, x_n) \le \varepsilon.$$

今は Lawvere 距離空間を考えているので、距離 $X(x,y)$ と $X(y,x)$ が異なり得るため, 最後の条件に両方を課している. 点列 $\{x_n\}$ が, y にも z にも収束するなら, $X(y,z) \le X(x_n, z) + X(y, x_n) \xrightarrow{n \to \infty} 0$ なので y と z は同型である. 任意の Cauchy 列が収束点を持つとき, *Cauchy* **完備**であると呼ぶことにする.

2.1 収束点と weighted colimit

ここでは豊穣圏としての見方から Cauchy 列をとらえることができることを見る. まず次の $\overline{\mathbb{R}}_+$-豊穣圏 $\mathcal{D}$ を定義する.

Definition 2.1. $\overline{\mathbb{R}}_+$-豊穣圏 $\mathcal{D}$ を次で定義する.

- 対象は $\{d_n\}_{n \in \mathbb{N}}$.

- $n < m$ ならば, $\mathcal{D}(d_n, d_m) = \mathcal{D}(d_m, d_n) = \frac{1}{n}$.

特にこれは距離空間である. ■

三角不等式は, $n < m < k$ として次のような三角形を考えれば良い.

$$\begin{tikzcd}
d_n \arrow[r, leftrightarrow, "\frac{1}{n}"] \arrow[dr, leftrightarrow, "\frac{1}{n}"'] & d_m \arrow[d, leftrightarrow, "\frac{1}{m}"] \\
& d_k
\end{tikzcd}$$

$\mathcal{D}$ における $\{d_n\}$ は Cauchy 列である. 逆に次の定理により $\mathcal{D}$ がある意味 Cauchy 列を特徴づける.

Theorem 2.2. $\overline{\mathbb{R}}_+$-豊穣圏 X に関して次は同値

(i) X は *Cauchy* 完備

(ii) X の点列 $\{x_n\}$ で $n < m$ ならば $X(x_n, x_m), X(x_m, x_n) \leq \frac{1}{n}$ を満たすものは収束する.

(iii) X は $\Phi_{\mathcal{D}} \colon \mathcal{D} \to \overline{\mathbb{R}}_+;\ d_n \mapsto \frac{1}{n}$ を *weight* とした任意の $\Phi_{\mathcal{D}}$-*colimit* をもつ.

Proof. $(i) \Rightarrow (ii)$ は明らか. $(ii) \Rightarrow (i)$ を示すには, Cauchy 列 $\{x_n\}$ の部分点列 $\{x_{N_i}\}$ が x_∞ に収束するならば, 元の Cauchy 列も x_∞ に収束することを示せば良い.[*2] 任意に $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ をとって, $M \in \mathbb{N}$ を $\forall n, m > M, X(x_n, x_m) \leq \varepsilon/2$ を満たすようにとっておく. さらに十分に大きい L を $X(x_{N_L}, x_\infty), X(x_\infty, x_{N_L}) \leq \varepsilon/2$ を満たすようにとる. すると, $n \geq M$ ならば,

$$\begin{aligned} X(x_n, x_\infty) &\leq X(x_{N_L}, x_\infty) + X(x_n, x_{N_L}) \leq \varepsilon, \\ X(x_\infty, x_n) &\leq X(x_{N_L}, x_n) + X(x_\infty, x_{N_L}) \leq \varepsilon \end{aligned}$$

を満たす.

最後に $(ii) \Leftrightarrow (iii)$ を示す. まず, 点列 $\{x_n\}$ で $n < m$ ならば $X(x_n, x_m), X(x_m, x_n) \leq \frac{1}{n}$ を満たすものは, $\mathcal{D}$ からの非拡大的写像 $x_\bullet \colon d_n \mapsto x_n$ に他ならない. この対応で, 点列 $\{x_n\}$ が x_∞ へ収束することと, x_∞ が $x_\bullet$ の $\Phi_{\mathcal{D}}$-colimit になることが同値であることを示せば良い. 後者は任意の $y \in X$ について $X(x_\infty, y) = \sup_{n \in \mathbb{N}}[\frac{1}{n}, X(x_n, y)]$ であることと同値であった.

この点列 $\{x_n\}$ が x_∞ へ収束するならば $X(x_n, x_\infty) \leq X(x_m, x_\infty) + X(x_n, x_m) \leq X(x_m, x_\infty) + \frac{1}{n} \xrightarrow{m \to \infty} \frac{1}{n}$ であるから, $X(x_n, x_\infty) \leq \frac{1}{n}$. よって,

$$X(x_\infty, y) \geq X(x_\infty, y) + X(x_n, x_\infty) - \frac{1}{n} \geq X(x_n, y) - \frac{1}{n}.$$

逆に, 任意に $\varepsilon > 0$ をとったとき, $N \in \mathbb{N}$ を $n \geq N$ ならば $X(x_\infty, x_n), \frac{1}{n} \leq \varepsilon/2$ を満たすように十分大きくとれば, $n \geq N$ のとき

$$X(x_\infty, y) + \frac{1}{n} \leq X(x_n, y) + X(x_\infty, x_n) + \frac{1}{n} \leq X(x_n, y) + \varepsilon$$

となるので, $X(x_\infty, y) \leq \left[\frac{1}{n}, X(x_n, y)\right] + \varepsilon$. ゆえに $X(x_\infty, y) = \sup_{n \in \mathbb{N}}[\frac{1}{n}, X(x_n, y)]$ が従う.

[*2] 距離に対称性はないが, 普通の距離空間の場合と同様の証明である. 選択公理は認めている.

最後に, 逆に $X(x_\infty, y) = \sup_{n\in\mathbb{N}}[\frac{1}{n}, X(x_n, y)]$ を仮定して, $\{x_n\}$ が収束することを証明しよう. このとき, $X(x_n, x_\infty), X(x_\infty, x_n) \leq \frac{1}{n}$ を示せば良い. 前者は Proposition 1.2 から従う. 後者は $X(x_\infty, x_n) = \sup_{m\in\mathbb{N}}[\frac{1}{m}, X(x_m, x_n)] \leq \sup_{m\in N}[\frac{1}{m}, \mathcal{D}(d_m, d_n)]$ であるが, $m \leq n$ のとき $[\frac{1}{m}, \mathcal{D}(d_m, d_n)] = 0$ であり, $m > n$ のとき $[\frac{1}{m}, \mathcal{D}(d_m, d_n)] = \frac{1}{n} - \frac{1}{m} < \frac{1}{n}$ であることから従う. □

Corollary 2.3. $\Phi_{\mathcal{D}}$*-colimit* は *absolute colimit* である.

Proof. 非拡大的写像は特に連続なので点列の極限を保つ. 前の定理より Cauchy 列の極限は $\Phi_{\mathcal{D}}$-colimit として特徴づけられるので, 任意の関手で保たれる. [*3] □

2.2 Cauchy 完備化

Cauchy 完備化を考えるためには, Cauchy 列の同値関係 $\{x_n\} \sim \{y_n\}$ を考える. これは通常と同じく次を満たすこととして定める.

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_{>0},\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n, m > N,\ X(x_n, y_m), X(y_m, x_n) < \varepsilon.$$

また, ∞ を含む実数列の極限は $\lim_{n\to\infty}$ で書くことにする.

Lemma 2.4. *Lawvere* 距離空間 X の *Cauchy* 列 $\{x_n\}, \{y_n\}$ に対して, 次は同値.

(i) $\{x_n\}$ と $\{y_n\}$ は同値な *Cauchy* 列.
(ii) 任意の $a \in X$ について, $\lim_{n\to\infty} X(a, x_n) = \lim_{n\to\infty} X(a, y_n)$.
(iii) 任意の $a \in X$ について, $\lim_{n\to\infty} X(x_n, a) = \lim_{n\to\infty} X(y_n, a)$.

Proof. (i) と (ii) の同値性を示せば (iii) とも同値になることは明らか. (i)⇒(ii) は $X(a, x_n) + X(x_n, y_n) \geq X(a, y_n)$ の両辺の極限から $\geq$ の方向が示せ, 逆も対称性から示せる.

(ii)⇒(i) を示す. 任意に $\varepsilon > 0$ をとっておき, まず $\{x_n\}$ が Cauchy 列であることから, $N \in \mathbb{N}$ で次を満たすものをとる.

$$\forall n, m \geq N,\ X(x_n, x_m) \leq \frac{\varepsilon}{3}.$$

このとき $\lim_{n\to\infty} X(x_N, y_n) = \lim_{n\to\infty} X(x_N, x_n) < \frac{\varepsilon}{2}$ なので, 十分大きい $M \in \mathbb{N}$ が, $M > N$ と次を満たすように取れる.

$$\forall m > M,\ X(x_N, y_m) \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

よって以上より, $n, m \geq M$ ならば $X(x_n, y_m) \leq X(x_n, x_N) + X(x_N, y_m) < \varepsilon$. 逆も同様. □

Cauchy 完備な A とその部分空間 S に関して, S の点列であって A の点 a に収束するようなものがある a たちを集めて, 部分空間 B $(S \subseteq B \subseteq A)$ を定義する. 任意に B の Cauchy 列 $\{b_n\}$ をとったとき, 各 n に対して b_n に収束する S の Cauchy 列 $\{s^n_i\}_i$ であって, $Y(s^n_i, s^n_j) \leq \frac{1}{n}$ を満たすものが取れる. このとき $\{s^n_n\}$ が $\{b_n\}$ と同じ点に収束する S の Cauchy 列になる. よって, B は S を含む A の最小の Cauchy 完備な部分空間になる.

[*3] colimit かつ limit になることを示しても良い.

Theorem 2.5. *Lawvere* 距離空間 X に対して, その *Cauchy* 列全体を同値関係 $\sim$ で割り, $\{x_n\}$ から $\{y_n\}$ への距離を $\lim_{n\to\infty} X(x_n, y_n)$ で定めた *Lawvere* 距離空間は, 前層圏 $[X^{\mathrm{op}}, \overline{\mathbb{R}}_+]$ において, 米田埋め込み $X \to [X^{\mathrm{op}}, \overline{\mathbb{R}}_+]$ を含む *Cauchy* 完備な最小の部分空間 $\overline{X}$ と同型である.

Proof. 先ほどの議論と Theorem 2.2 から, $\overline{X}$ は $[X^{\mathrm{op}}, \overline{\mathbb{R}}_+]$ における, 表現可能関手たちの $\Phi_{\mathcal{D}}$-colimit で表せるものたちであることがわかった. $\overline{X}$ の任意の対象に対して, 対応する $x_\bullet \colon \mathcal{D} \to X$ を一つとる. 任意の X の点 a について,

$$\begin{aligned}
\mathrm{colim}^{\Phi_{\mathcal{D}}} Y x_\bullet(a) &= \mathrm{colim}^{\Phi_{\mathcal{D}}} X(a, x_\bullet) \\
&= \inf_{d_n \in \mathcal{D}} (\Phi d_n + X(a, x_{d_n})) \\
&= \inf_{n \in \mathbb{N}} \left(\frac{1}{n} + X(a, x_n) \right)
\end{aligned}$$

固定した n に対し, 任意に $\varepsilon > 0$ をとったとき, 十分大きく N を取れば, $m \geq N$ ならば $\frac{1}{n} \geq X(x_n, x_m)$ かつ $\varepsilon \geq \frac{1}{m}$ とできるので, $\inf_{n\in\mathbb{N}} \left(\frac{1}{n} + X(a, x_n)\right) = \lim_{m\to\infty} X(a, x_m)$ と表せることがわかる. Lemma 2.4 から, $\overline{X}$ の対象はちょうど Cauchy 列の同値類を 1 つ定めることが示された.

$\overline{X}$ に入る距離が $\lim_{n\to\infty} X(x_n, y_n)$ であることを示そう. これは次のようにして示せる.

$$\begin{aligned}
\overline{X}\left(\mathrm{colim}^{\Phi_{\mathcal{D}}} X(-, x_\bullet),\ \mathrm{colim}^{\Phi_{\mathcal{D}}} X(-, y_*)\right) &= \lim{}^{\Phi_{\mathcal{D}} \bullet}\ \overline{X}\left(X(-, x_\bullet),\ \mathrm{colim}^{\Phi_{\mathcal{D}} *} X(-, y_*)\right) \\
&= \lim{}^{\Phi_{\mathcal{D}} \bullet}\ \mathrm{colim}^{\Phi_{\mathcal{D}} *} X(x_\bullet, y_*) \\
&= \lim{}^{\Phi_{\mathcal{D}}}\ \lim_{n\to\infty} X(x_\bullet, y_n) \\
&= \sup_{m\in\mathbb{N}} \left[\frac{1}{m},\ \lim_{n\to\infty} X(x_m, y_n)\right] \\
&= \lim_{m\to\infty} \lim_{n\to\infty} X(x_m, y_n) \quad = \quad \lim_{n\to\infty} X(x_n, y_n)
\end{aligned}$$

4 行目から 5 行目の変形は, 先ほど colimit が $\lim_{n\to\infty}$ で表せることを示したのと同様の議論による. □

特に $\overline{\mathbb{R}}_+$-豊穣圏では, 米田埋め込みは対象に関して単射とは限らない. $\overline{\mathbb{R}}_+$ は skeletal なので前層圏も skeletal であり, 米田埋め込みの像は同型な対象を潰す. Lawvere 距離空間は同値関係で割らずとも Cauchy 列たちで完備な Lawvere 距離空間を作ることができるが, これは前層圏に埋め込むことで作るものとは同値だが同型ではないことがわかる.

3 Cauchy 完備の圏論的特徴づけ

ここでは, Lawvere 距離空間 X が Cauchy 完備であることの圏論的な特徴づけをみて, それにより, 次の章で逆に一般の $\mathcal{V}$-豊穣圏 $\mathcal{C}$ に対して Cauchy 完備性を定義しよう. 以下 $\mathcal{V}$ は Bénabou cosmos[*4] とする.

$\mathcal{V}$-豊穣圏を object, profunctor $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}^{\mathrm{op}} \to \mathcal{V}$ を 1-cell $\mathcal{A} \nrightarrow \mathcal{B}$, $\mathcal{V}$-自然変換を 2-cell とする bicategory $\mathcal{V}$-**Prof** が定義できる. 合成は coend で定義される. $\mathcal{A} \nrightarrow \mathcal{B}$ は, cocontinuous な $[\mathcal{A}^{\mathrm{op}}, \mathcal{V}] \to [\mathcal{B}^{\mathrm{op}}, \mathcal{V}]$ と思っても良い. このときも 2-cell は単に $\mathcal{V}$-自然変換になる. [*5]

[*4] 対称モノイダル閉圏で, 完備かつ余完備なもの
[*5] $\mathcal{V}$-**Prof** を扱う際, 本当は size matter を丁寧に扱う必要があるがここでは省略する

任意の関手 $F\colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ は, (普遍随伴により) bicategory $\mathcal{V}$-**Prof** において, 随伴 $F_* \dashv F^*$ を誘導する. ($F_* = \mathcal{B}(-, F\bullet)$, $F^* = \mathcal{B}(F\bullet, -)$.)

次の命題は, $\mathcal{V} = \overline{\mathbb{R}}_+$ のときに, 逆に $\overline{\mathbb{R}}_+$-**Prof** の特定の形の随伴がこのような随伴に誘導されるための十分条件をいう.

Proposition 3.1. *Cauchy 完備な Lawvere 距離空間 X について, profunctor $p\colon \{*\} \nrightarrow X$ が $\overline{\mathbb{R}}_+$-**Prof** で右随伴 q を持つならば, ある点 $x \in X$ が存在して, $p = X(-, x)$ で与えられる.*

Proof. $\overline{\mathbb{R}}_+$-**Prof** において, $p\colon \{*\} \nrightarrow X$ と q が随伴であるとは, $\overline{\mathbb{R}}_+$-自然変換 $pq \Rightarrow \mathrm{Hom}_X$ と $\mathrm{Hom}_{\{*\}} \Rightarrow qp$ が単に存在すること. Coend は, inf で計算できたことと, 自然性は情報を持たないことを思い出すと, それぞれ次と同値.

$$
\begin{aligned}
p(x) + q(x') &\geq X(x, x') \\
0 &= \inf_{x \in X} (p(x) + q(x))
\end{aligned}
$$

後者から, 点列 $\{x_n\}$ が, $p(x_n) + q(x_n) \leq \frac{1}{n}$ を満たすように取れる. これは, $X(x_n, x_m) \leq \frac{1}{n} + \frac{1}{m}$ を満たすので, Cauchy 列である.

このとき, $p(y) = \lim_{n\to\infty} X(y, x_n)$ となることを示そう. まず, $p(y) \geq X(y, x_n) - q(x_n) \to \lim_{n\to\infty} X(y, x_n)$ がわかる. 逆に, p は反変関手 $X^{\mathrm{op}} \to \overline{\mathbb{R}}_+$ であるから, $p(y) = \lim_{n\to\infty}[p(x_n), p(y)] \leq \lim_{n\to\infty} X(y, x_n)$ となる.

Cauchy 列 $\{x_n\}$ の収束点 x_∞ は $\lim_{n\to\infty} X(y, x_n) = X(y, x_\infty)$ をみたす. □

この定理の主張は豊穣圏の一般論を用いて, より強めることができる.

Lemma 3.2. *$\mathcal{A}$ が small のとき, $\Phi\colon \mathcal{A}^{\mathrm{op}} \to \mathcal{V}$ に関して, 以下は同値.*

(i) Φ-limit は存在すればいつも absolute limit.
(ii) Φ-colimit は存在すればいつも absolute colimit.
(iii) Φ-colimit は米田埋め込みで保たれる.
(iv) $\Psi\colon \mathcal{B}^{\mathrm{op}} \to \mathcal{V}$, $P\colon \mathcal{A}^{\mathrm{op}} \otimes \mathcal{B} \to \mathcal{V}$ に対して, canonical な射 $\mathrm{colim}^\Psi \lim^\Phi P \nrightarrow \lim^\Phi \mathrm{colim}^\Psi P$ が同型になる.
(v) 前層圏 $[\mathcal{A}^{\mathrm{op}}, \mathcal{V}]$ において, Φ は tiny[*6]*.*
*(vi) Φ を profunctor $\mathcal{I} \nrightarrow \mathcal{A}$ とみたとき, $\mathcal{V}$-**Prof** において右随伴が存在する.*

Proof. 双対性から (i)(ii) は同値. (ii)⇒(iii) は自明.

(iii)⇒(iv) は仮定から $G\colon \mathcal{A}^{\mathrm{op}} \to \mathcal{V}$ のとき $\lim^{\Phi-}[G-, *] \cong [\lim^\Phi G, *]$ が成り立っている. ゆえに $G =$

*6 $C \in \mathcal{C}$ が tiny (or small-projective) とは, $\mathcal{C}(C, -)$ が cocontinuous なこと.

$\mathrm{colim}^{\Psi\bullet}P(-,\bullet)$ で取れば,

$$\begin{aligned}
\left[\lim^{\Phi-}\mathrm{colim}^{\Psi\bullet}P(-,\bullet),\ *\ \right] &\cong \lim^{\Phi-}\left[\mathrm{colim}^{\Psi\bullet}P(-,\bullet),\ *\ \right] \\
&\cong \lim^{\Phi-}\lim^{\Psi\bullet}\left[P(-,\bullet),\ *\ \right] \\
&\cong \lim^{\Psi\bullet}\lim^{\Phi-}\left[P(-,\bullet),\ *\ \right] \\
&\cong \lim^{\Psi\bullet}\left[\lim^{\Phi-}P(-,\bullet),\ *\ \right] \\
&\cong \left[\mathrm{colim}^{\Psi\bullet}\lim^{\Phi-}P(-,\bullet),\ *\ \right]
\end{aligned}$$

から示される.

(iv)⇔(v) は $[\mathcal{A}^{\mathrm{op}},\mathcal{V}](\Phi,-)\cong\lim^{\Phi}(-)$ であることから明らか.

(v)⇒(vi). Profuntor の bicategory において, 次が p の q に沿った右 lift になる.

$$\begin{tikzcd}
 & & \mathcal{B} \arrow[d, "q", "\shortmid"{marking}] \\
\mathcal{C} \arrow[urr, "\int_{A\in\mathcal{A}}[q(\bullet,A),\ p(-,A)]", "\shortmid"{marking}] \arrow[rr, "p"', "\shortmid"{marking}] & \arrow[ur, phantom, "\Downarrow"] & \mathcal{A}
\end{tikzcd}$$

特に Φ を profunctor $\mathcal{I}\nrightarrow\mathcal{A}$ とみると, $p\colon\mathcal{C}\nrightarrow\mathcal{A}$ の Φ に沿った右 lift は $[\mathcal{A}^{\mathrm{op}},\mathcal{V}]\,(\Phi-,\ p(\bullet,-))$ で与えられる.

$[\mathcal{A}^{\mathrm{op}},\mathcal{V}]$ で Φ が tiny なら, 任意の $p\colon\mathcal{C}\nrightarrow\mathcal{A}$ に対して, identity profunctor $Y\colon\mathcal{A}\nrightarrow\mathcal{A}$ の Φ に沿った右 lift を $\mathrm{Rift}_{\Phi}Y$ とおくと,

$$\begin{aligned}
(\mathrm{Rift}_{\Phi}Y\circ p)(C) &\cong \int^{A}p(C,A)\otimes[\mathcal{A}^{\mathrm{op}},\mathcal{V}]\,(\Phi-,\ \mathcal{A}(A,-)) \\
&\cong \mathrm{colim}^{p(C,\bullet)}[\mathcal{A}^{\mathrm{op}},\mathcal{V}]\,(\Phi-,\ \mathcal{A}(\bullet,-)) \\
&\cong [\mathcal{A}^{\mathrm{op}},\mathcal{V}]\left(\Phi-,\ \mathrm{colim}^{p(C,\bullet)}\mathcal{A}(\bullet,-)\right) \\
&\cong [\mathcal{A}^{\mathrm{op}},\mathcal{V}]\,(\Phi-,\ p(C,-)) \\
&\cong (\mathrm{Rift}_{\Phi}p)(C)
\end{aligned}$$

Φ に沿った $1_{\mathcal{A}}$ の右 lift が absolute lift であるので, Φ が右随伴を持つ.

最後に (vi)⇒(ii) を示す. $G\colon\mathcal{A}\to\mathcal{B}$ とする. B が G の Φ-colimit であるとは, 次が右 lift であることである.

$$\begin{tikzcd}
 & & \mathcal{I} \arrow[d, "\Phi", "\shortmid"{marking}] \\
\mathcal{B} \arrow[urr, "\mathcal{B}(B,-)", "\shortmid"{marking}] \arrow[rr, "G^{*}:=\mathcal{B}(G\bullet,-)"', "\shortmid"{marking}] & \arrow[ur, phantom, "\Downarrow"] & \mathcal{A}
\end{tikzcd}$$

Φ が右随伴を持つならば, この Φ に沿った右 lift は absolute になる. $H\colon\mathcal{B}\to\mathcal{C}$ としたとき, $(\mathcal{B}(B,-)\circ H^{*})(C)=\int^{B'}\mathcal{B}(B,B')\otimes\mathcal{C}(HB',C)\cong\mathcal{C}(HB,C)$ となることから, $(HG)^{*}$ の Φ に沿った右 lift が $\mathcal{C}(H\mathrm{colim}^{\Phi}G,-)$ と表せる. よって $H\mathrm{colim}^{\Phi}G\cong\mathrm{colim}^{\Phi}HG$ だから, Φ-colimit は absolute. □

Definition 3.3. $\Phi\colon \mathcal{A}^{\mathrm{op}} \to \mathcal{V}$ が *absolute weight* であるとは, Φ-colimit が存在すればいつも absolute colimit になることである. ■

Absolute weight Φ に対して, Φ-weighted colimit は, $\left(\lim^{\Phi-}\mathcal{A}(-,\bullet)\right)$-weighted limit になる. これは, $\lim^{-}\mathcal{B}(B,\bullet)\colon [\mathcal{A}^{\mathrm{op}},\mathcal{V}]^{\mathrm{op}} \to \mathcal{V}$ と Φ-colimit が交換するので,

$$\begin{aligned}
\lim^{\lim^{\Phi-}\mathcal{A}(-,\bullet)}\mathcal{B}(B,G\bullet) &\cong \operatorname{colim}^{\Phi-}\lim^{\mathcal{A}(-,\bullet)}\mathcal{B}(B,G\bullet)\\
&\cong \operatorname{colim}^{\Phi-}\mathcal{B}(B,G-)\\
&\cong \mathcal{B}(B,\operatorname{colim}^{\Phi}G)
\end{aligned}$$

と計算できることからわかる.

Theorem 3.4. *$\mathcal{V}$-豊穣圏 $\mathcal{C}$ について, 以下は同値.*

(i) $\forall\mathcal{A}$, $p\colon \mathcal{A} \nrightarrow \mathcal{C}$ が右随伴を持つならば, ある $K\colon \mathcal{A}\to\mathcal{C}$ があって, $p(\bullet,-)\cong\mathcal{C}(-,K\bullet)$.

(ii) $p\colon \mathcal{I}\nrightarrow\mathcal{C}$ が右随伴を持つならば, ある $C\in\mathcal{C}$ があって, $p\cong\mathcal{C}(-,C)$.

(iii) $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}\to\mathcal{V}$ は absolute weight ならば表現可能.

(iv) $\mathcal{C}$ は任意の absolute weight の colimit をもつ.

Proof. (i)⇒(ii) は自明. (ii)⇒(i) を示す. 任意の $A\in\mathcal{A}$ について, 次を考える.

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{I} \arrow[r, "\mathcal{A}(-,A)", "\shortmid"{marking}, shift left=2] \arrow[r, phantom, "\perp"] & \mathcal{A} \arrow[l, "\mathcal{A}(A,-)", "\shortmid"{marking}, shift left=2] \arrow[r, "p", "\shortmid"{marking}, shift left=2] \arrow[r, phantom, "\perp"] & \mathcal{C} \arrow[l, "q", "\shortmid"{marking}, shift left=2]
\end{tikzcd}$$

仮定からある $KA\in\mathcal{C}$ が存在して, $p(A,-)\cong\mathcal{C}(-,KA)$. この K は一意に欲しい関手 $\mathcal{A}\to\mathcal{B}$ へ拡張する.

(ii) は Lemma 3.2 より (iii) と同値.

(iii)⇒(iv) を示す. $\Phi\colon\mathcal{A}^{\mathrm{op}}\to\mathcal{V}$ を absolute weight とする. $P\colon\mathcal{A}\to[\mathcal{C}^{\mathrm{op}},\mathcal{V}]$ を absolute weight に値を取る関手とする. このとき, $\Psi\colon\mathcal{D}\to\mathcal{V}$ と $Q\colon\mathcal{C}^{\mathrm{op}}\otimes\mathcal{D}^{\mathrm{op}}\to\mathcal{V}$ とすると

$$\lim^{\operatorname{colim}^{\Phi}P}\operatorname{colim}^{\Psi}Q \cong \lim^{\Phi-}\lim^{P-}\operatorname{colim}^{\Psi}Q \cong \operatorname{colim}^{\Psi}\lim^{\Phi-}\lim^{P-}Q \cong \operatorname{colim}^{\Psi}\lim^{\operatorname{colim}^{\Phi}P}Q$$

となるので $\operatorname{colim}^{\Phi}P$ も absolute weight である. よって, 任意の $G\colon\mathcal{A}\to\mathcal{C}$ に対して, $\operatorname{colim}^{\Phi}YG$ も absolute weight. (iii) により $\operatorname{colim}^{\Phi}YG$ に対してある $C\in\mathcal{C}$ が取れて, $\operatorname{colim}^{\Phi-}\mathcal{C}(\bullet,G-)\cong\mathcal{C}(\bullet,C)$ をみたす. Φ-colimit は limit としても表現できたことを思い出すと, C が Φ-colimit である.

最後に (iv)⇒(iii) を示す. 任意に absolute weight $\Phi\colon\mathcal{C}^{\mathrm{op}}\to\mathcal{V}$ をとったとき, $\Phi\cong\operatorname{colim}^{\Phi}Y\cong Y\operatorname{colim}^{\Phi}\mathrm{Id}$ であるから, これは表現可能. □

以上より, Lawvere 距離空間における Cauchy complete 性が特徴づけられる.

Corollary 3.5. *$\overline{\mathbb{R}}_{+}$-豊穣圏 X について, Cauchy complete であることと任意の absolute weight の colimit を持つことが同値.*

ここから, Lawvere 距離空間において非拡大的写像で保存される構造は, おおよそ Cauchy 列で特徴づけられるはずであることが推測できる.

4 一般の豊穣圏での Cauchy 完備性

Lawvere 距離空間の場合を一般化する.

Definition 4.1. $\mathcal{V}$-豊穣圏 $\mathcal{C}$ が *Cauchy* **完備**であるとは, 任意の absolute weight Φ について Φ-colimit があることである.

また, $\mathcal{C}$ の Cauchy 完備化 $\bar{\mathcal{C}}$ を $[\mathcal{C}^{\mathrm{op}}, \mathcal{V}]$ における tiny object 全体からなる full sub category で定める. ■

Cauchy 完備であることは, $\mathcal{V}$-**Prof** における随伴を使っても定義でき, Cauchy 完備化 $\overline{\mathcal{C}}$ は, absolute weight 全体とも定義できる.

$\overline{\overline{\mathcal{C}}} \simeq \overline{\mathcal{C}}$ を満たす closure property になっており, より強く次が言える.

Proposition 4.2. $\overline{(-)}$ は *size matter* を無視すれば $\mathcal{V}$-**CAT** 上の *(up-to equivalence* で*) idempotent 2-monad* を与える. [*7]

Absolute weight は $\mathcal{V}$ ごとに異なる.

Example 4.3. $\mathcal{V} = \mathbf{Set}$ とする. $\mathcal{E}$ を 1 つの object と唯一の非自明な射 e をもち, $e \circ e = e$ なる圏とする. 圏 $\mathcal{C}$ が Cauchy 完備であることと, 任意の idempotent が split することと, $\mathcal{E}$ からの関手が colimit を持つことが全て同値になる. ■

Example 4.4. $\mathcal{V} = \mathbf{Ab}$ のとき, Cauchy 完備であることと, idempotent が split し, biproduct を持つことが同値. ■

可換環 R を 1 点の **Ab**-豊穣圏としたとき, 前層圏 R-**Mod** の中で, preshaf $(= R)$ の biproduct とレトラクトで現れるものたち全体が Cauchy 完備化になる. すなわち有限生成射影加群全体が $\overline{R}$ になる. 特に体の Cauchy 完備化は有限次元線型空間全体なので, 有理数体 $\mathbb{Q}$ の Cauchy 完備化は有限次元 $\mathbb{Q}$ 線型空間全体になる.

参考文献

[Law02] F. William Lawvere. "Metric spaces, generalized logic, and closed categories". In: *Repr. Theory Appl. Categ.* 43.1 (2002). Originally published as Rendiconti del Seminario Matematico e Fisico di Milano, 1973., pp. 1–37.

[Kel05] G. M. Kelly. "Basic concepts of enriched category theory". In: *Repr. Theory Appl. Categ.* 10 (2005). Originally published as LMS Lecture Notes 64, 1982., pp. vi+137.

[alg22] alg_d. **全ての概念は** *Kan* **拡張である** *II:* **豊穣圏論**. Independently published, 2022 (cit. on p. 2).

[nLa22] nLab authors. *Cauchy complete category*. https://ncatlab.org/nlab/show/Cauchy+complete+category. Revision 61. July 2022.

*7 厳密には $\mathcal{V}$-**Cat** $\to$ $\mathcal{V}$-**CAT** の relative monad になるはず.