Strong, Commutative and Enriched Monad

K.Hirata

December 1, 2023

概要

この pdf は 圏論 Advent Calendar 2023 の 1 日目のエントリとして書かれました．対称モノイダル閉圏 $\mathcal{V}$ の上の可換モナドが $\mathcal{V}$-豊穣モナドを与えることを示します．

目次

1 Introduction

Monoidal category $\mathcal{V}$ 上のモナド (T, μ, η) には，strong monad，commutative monad などのいくつかの付加的な構造が考えられる．

Strong monad (left-strong monad) は，(left-)strength と呼ばれる自然変換 $A \otimes TB \to T(A \otimes B)$ を持つモナドであり，いくつかの coherence を満たすものである．詳細な定義は [nLa23] を参照されたい．Strong monad は，計算機科学の文脈で計算効果の意味論に用いられる [Mog91, Has02]．任意の $(\mathbf{Set}, \times, 1)$ 上の monad は自然な strong monad の構造を持つので，これらが具体例になる．ただし，一般の $\mathcal{V}$ 上の monad は strength を持つとは限らない．

一方，commutative monad とは，T が lax monoidal functor の構造を持っており，μ と η が monoidal transformation であるようなモナドである．すなわち 2-category $\mathbf{MonCat}_l$ における monad のことをさす．Commutative monad は commutative algebraic theory [Lin66] と深い関わりがある．Commutative algebraic theory に関しては良い日本語の解説動画があるので，お勧めしておこう [Fuj21]．具体例としては，$(\mathbf{Set}, \times, 1)$ 上の free Abelian group monad などがある．

また，$\mathcal{V}$ が特に symmetric monoidal closed category の場合，$\mathcal{V}$ を自身で enrich した圏だと考え，その上の $\mathcal{V}$-enriched monad を考えると，これも一般の monad に対して付加的な構造を持った monad だと考えられる．

これらの 3 つの monad に対する付加的な構造について，次の定理がその関連を示している．

Theorem 1.1. $\mathcal{V}$ を *symmetric monoidal category* とする．

(i) $\mathcal{V}$ *がさらに monoidal closed category であるとき，*$\mathcal{V}$ *上の strong monad は* $\mathcal{V}$ *上の* $\mathcal{V}$*-enriched monad と等価である．*

(ii) 対称性により $\mathcal{V}$ *上の left-strong monad は* $\mathcal{V}$ *上の right-strong monad の構造も与えるが，これらの左右の strength が与える 2 つの射* $TA \otimes TB \to T(A \otimes B)$ *が等しくなるようなものと，*$\mathcal{V}$ *上の commutative monad の構造は等価である．*

この記事では，$\mathcal{V}$ が symmetric monoidal closed category である場合に制限して，commutative monad が enriched monad になることを，strength を介さずに示そう．

2 Base change

Monoidal category と lax monoidal functor, lax monoidal transformation からなる 2-category を $\mathbf{MonCat}_l$ と書くことにする．

Monoidal category $\mathcal{V}$ に対して $\mathcal{V}$-enriched category の 2 圏 $\mathcal{V}$-**Cat** を対応させることを考える．また，lax monoidal functor $\mathcal{V} \to \mathcal{W}$ が与えられたとき，これは **base chage** によって 2-functor $\mathcal{V}$-**Cat** $\to \mathcal{W}$-**Cat** を誘導し，さらに monoidal transformation は 2-natural transformation を誘導する．この対応によって，$\mathbf{MonCat}_l$ から 2-category，2-functor，2-natural transformation の 2 圏 2-**CAT** への 2-functor $(-)$-**Cat** を得る．

$\mathcal{V}$ と $\mathcal{W}$ を symmetric monoidal closed category とする．いま，monoidal category としてみた $\mathcal{V}$ や $\mathcal{W}$ と，self-enriched category としてみた $\mathcal{V}$ や $\mathcal{W}$ は特に区別せず同じ記法で書くことにする．Lax monoidal functor が $F \colon \mathcal{V} \to \mathcal{W}$ が与えられたとき，base change の 2-functor を $\mathscr{F} \colon \mathcal{V}$-**Cat** $\to \mathcal{W}$-**Cat** と呼ぶことにする．このとき $\mathscr{F}\mathcal{V}$ は，$\mathcal{W}$-enriched category であって，object は $\mathcal{V}$ と同じ，hom object は $\mathscr{F}\mathcal{V}(a,b) = F[a,b]$ で定義されるようなものになる．Identity や合成は次で定義される．

$$I_{\mathcal{W}} \to FI_{\mathcal{V}} \xrightarrow{Fj} F[a,a] = \mathscr{F}\mathcal{V}(a,a)$$

$$\mathscr{F}\mathcal{V}(b,c) \otimes_{\mathcal{W}} \mathscr{F}\mathcal{V}(a,b) = F[b,c] \otimes F[a,b] \xrightarrow{F^2} F([b,c] \otimes [a,b]) \xrightarrow{F\circ} F[a,c] = \mathscr{F}\mathcal{V}(a,c)$$

Proposition 2.1. *[EK66]* F *は自然な* $\mathcal{W}$*-functor* $\overline{F} \colon \mathscr{F}\mathcal{V} \to \mathcal{W}$ *を誘導する．*

Proof. Object に関しては $\overline{F}a = Fa$ と定義する．Hom に関しては，

$$\mathscr{F}\mathcal{V}(a,b) = F[a,b] \to [Fa, Fb]$$

を，次の transpose で定めれば良い．

$$F[a,b] \otimes Fa \xrightarrow{F^2} F([a,b] \otimes Fa) \xrightarrow{F\mathrm{ev}} Fb$$

これが $\mathcal{W}$-functor であることは容易に確かめられる．□

余談だが，Representable $\mathcal{V}$-functor $YA \colon \mathcal{A} \to \mathcal{V}$ が与えられたとき，$\overline{F} \circ \mathscr{F}(YA) \colon \mathscr{F}\mathcal{A} \to \mathcal{W}$ が representable $\mathcal{W}$-functor YA になることが知られている [EK66].

3 Enriched adjunction

2-category $\mathbf{MonCat}_l$ の adjunction，すなわち $(F, G, \eta, \varepsilon)$ なる adjunction をなす組であって，F, G が lax monoidal で，η, ε が monoidal transformation であるものを monoidal adjunction と呼ぶ．次の事実が知られている．証明は省く．

Proposition 3.1. *[Mel09] Monoidal adjunction $F \dashv G$ が与えられたとき，F は strong monoidal functor になる.*[*1]

Symmetric monoidal closed category $\mathcal{V}$ と $\mathcal{W}$ の間に，次の monoidal adjunction $F \dashv G$ を考える．

$$\begin{tikzcd} \mathcal{V} \arrow[r, bend left, "F"] \arrow[r, phantom, "\perp"] & \mathcal{W} \arrow[l, bend left, "G"] \end{tikzcd}$$

2-functor は adjunction を保つので，2-functor $(-)$-$\mathbf{Cat}$ により，次の 2-adjunction を得る．

$$\begin{tikzcd} \mathcal{V}\text{-}\mathbf{Cat} \arrow[r, bend left, "\mathscr{F}"] \arrow[r, phantom, "\perp"] & \mathcal{W}\text{-}\mathbf{Cat} \arrow[l, bend left, "\mathscr{G}"] \end{tikzcd}$$

この随伴の unit の $\mathcal{V} \in \mathcal{V}$-$\mathbf{Cat}$ 成分を $E\colon \mathcal{V} \to \mathscr{G}\mathscr{F}\mathcal{V}$ とする．この E は，object に関しては $Ea = a$，hom に関しては $[a, b] \xrightarrow{\eta} GF[a, b]$ で定義されている．

Theorem 3.2. 次の *$\mathcal{V}$-adjunction* がある．

$$\begin{tikzcd} & \mathscr{G}\mathscr{F}\mathcal{V} \arrow[dr, "\mathscr{G}\overline{F}"] & \\ \mathcal{V} \arrow[ur, "E"] \arrow[rr, phantom, "\perp"] & & \mathscr{G}\mathcal{W} \arrow[ll, bend left, "\overline{G}"] \end{tikzcd}$$

Proof. 随伴の unit $\mathrm{Id} \Rightarrow \overline{G} \circ \mathscr{G}\overline{F} \circ E$ と counit $\mathscr{G}\overline{F} \circ E \circ \overline{G} \Rightarrow \mathrm{Id}$ をつくろう．Unit は，$\mathcal{V}$ の object v について $\overline{G}(\mathscr{G}\overline{F})Ev = GFv$ なので，$\overline{\eta}\colon I_{\mathcal{W}} \to [v, GFv]$ で作れば良い．Counit については $w \in \mathcal{W}$ に対して $\mathscr{G}\mathcal{W}$ の underlying category $\mathscr{G}\mathcal{W}_0$ での morphism $FGw \nrightarrow w$ が欲しいので，次で定義すれば良い．

$$I_{\mathcal{V}} \xrightarrow{G^0} GI_{\mathcal{W}} \xrightarrow{G\overline{\varepsilon}} G[FGw, w]$$

これらの自然性，triangle identities は，Proposition 3.1 などを使いつつ確かめられる． □

この定理を使うと，最初に述べた事実が確かめられる．

[*1] この strong monoidal functor は strength を持つという意味ではなく，$FA \otimes FB \cong F(A \otimes B)$ なる意味である．

Corollary 3.3. $\mathcal{V}$ を *symmetric monoidal closed category* とする．$\mathcal{V}$ 上の *commutative monad*，つまり *lax monoidal monad* は，$\mathcal{V}$ 上の *enriched monad* を与える．

Proof. $\mathcal{V}$ 上の commutative monad (つまり $\mathbf{MonCat}_l$ における monad) から，Kleisli category との monoidal adjunction を得ることができる．この Kleisli category を $\mathcal{W}$ として Theorem 3.2 を適用して得られる $\mathcal{V}$-adjunction が誘導する $\mathcal{V}$ 上の $\mathcal{V}$-enriched monad が求めるものである． □

さらに，この定理から，[Has02, Lemma2] に closedness の条件を足したものを説明することもできる．

Corollary 3.4. *Symmetric monoidal closed category* $\mathcal{V}$ と $\mathcal{W}$ と，*monoidal adjunction* $F \dashv G$，$\mathcal{W}$*-enriched monad* T が下のように与えられたとき，GTF が $\mathcal{V}$*-enriched monad* を与える．

$$\begin{tikzcd} \mathcal{V} \arrow[rr, bend left, "F"] \arrow[rr, phantom, "\perp"] & & \mathcal{W} \arrow[ll, bend left, "G"] \arrow[loop right, "T"] \end{tikzcd}$$

Proof. $\mathcal{V}$-**Cat** で次が得られることから従う．

$$\begin{tikzcd} \mathcal{V} \arrow[rr, bend left, "\mathscr{G}\overline{F} \circ E"] \arrow[rr, phantom, "\perp"] & & \mathscr{G}\mathcal{W} \arrow[ll, bend left, "\overline{G}"] \arrow[loop right, "\mathscr{G}T"] \end{tikzcd}$$

□

参考文献

[EK66] S. Eilenberg and G. M. Kelly. "Closed Categories." In: S. Eilenberg, D. K. Harrison, S. MacLane, and H. Röhrl, eds., *Proceedings of the Conference on Categorical Algebra*. Springer Berlin Heidelberg, Berlin, Heidelberg, pp. 421–562. doi: 10.1007/978-3-642-99902-4_22.

[Fuj21] S. Fujii. "可換な理論とテンソル積.", 2021. `https://youtu.be/ujEuUrqXJsc?si=1M1h4tZ-8UGAdq8T`.

[Has02] M. Hasegawa. "Linearly Used Effects: Monadic and CPS Transformations into the Linear Lambda Calculus." In: Z. Hu and M. Rodríguez-Artalejo, eds., *Functional and Logic Programming, 6th International Symposium, FLOPS 2002, Aizu, Japan, September 15-17, 2002, Proceedings*. Springer, *Lecture Notes in Computer Science*, vol. 2441, pp. 167–182. doi: 10.1007/3-540-45788-7_10.

[Lin66] F. E. Linton. "Autonomous Equational Categories." *Journal of Mathematics and Mechanics*, 1966. vol. 15(4):pp. 637–642.

[Mel09] P.-A. Mellies. "Categorical semantics of linear logic." *Panoramas et syntheses*, 2009. vol. 27:pp. 15–215.

[Mog91] E. Moggi. "Notions of Computation and Monads." *Inf. Comput.*, 1991. vol. 93(1):pp. 55–92. doi: 10.1016/0890-5401(91)90052-4.

[nLa23] nLab authors. "strong monad." `https://ncatlab.org/nlab/show/strong+monad`, 2023. Revision 66.