How to use Day's reflection theorem

K.Hirata

December 2, 2023

概要

この pdf は 圏論 Advent Calendar 2023 の 2 日目のエントリとして書かれました．Day の reflection theorem と呼ばれる定理を紹介し，使用例を挙げます．

目次

1 Reflection Theorem

Brian Day の仕事として最も有名なのは Day convolution [Day70] だろう．もちろん Day convolution はあらゆる場面で頻出する重要な概念ではあるが，今回の記事では，筆者がそれ以上に頻繁に使用している Day の仕事の reflection theorem [Day72] について紹介する．

Day の reflection theorem とは，symmetric monoidal closed category (SMCC) $\mathcal{C}$ の reflective subcategory $\mathcal{D}$ に関する以下のような定理である．

Theorem 1.1 (Day's reflection theorem [Day72])**.** *$\mathcal{C}$: SMCC と，その reflective subcategory $\mathcal{D}$ があたえられたとする．*

$$\begin{tikzcd} \mathcal{C} \arrow[r, bend left, "r"] \arrow[r, phantom, "\perp"] & \mathcal{D} \arrow[l, hook] \end{tikzcd}$$

以下の 4 条件は同値である．

(i) 任意の $c \in \mathcal{C}$ と $d \in \mathcal{D}$ に対し，$\eta\colon [c,d] \to r[c,d]$ が同型である．

(ii) 任意の $c \in \mathcal{C}$ と $d \in \mathcal{D}$ に対し，$[\eta, 1]\colon [rc,d] \to [c,d]$ が同型である．

(iii) 任意の $c, c' \in \mathcal{C}$ に対し，$r(\eta \otimes 1)\colon r(c \otimes c') \to r(rc \otimes c')$ が同型である．

(iv) 任意の $c, c' \in \mathcal{C}$ に対し，$r(\eta \otimes \eta)\colon r(c \otimes c') \to r(rc \otimes rc')$ が同型である．

さらに，この 4 条件のいずれかが成り立つことと，r が strong monoidal functor になるような SMCC 構造が $\mathcal{D}$

に与えられることとは同値である．

Proof. 詳細は nlab [nLa23] にあるので，そちらを参照されたい．ここでは上の 4 条件が成り立つときに，$\mathcal{D}$ に SMCC 構造が与えられることを解説する．$\mathcal{D}$ における tensor unit/product を $I_{\mathcal{D}} \coloneqq rI_{\mathcal{C}}$ と $d \otimes_{\mathcal{D}} d' \coloneqq r(d \otimes_{\mathcal{C}} d')$ で定める．これが symmetric monoidal であることは (iii) から従う．例えば associativity は以下のようにして作られる．

$$\begin{aligned}(d \otimes_{\mathcal{D}} d') \otimes_{\mathcal{D}} d'' &= r(r(d \otimes_{\mathcal{C}} d') \otimes_{\mathcal{C}} d'') \cong r((d \otimes_{\mathcal{C}} d') \otimes_{\mathcal{C}} d'') \\ &\cong r(d \otimes_{\mathcal{C}} (d' \otimes_{\mathcal{C}} d'')) \cong d \otimes_{\mathcal{D}} (d' \otimes_{\mathcal{D}} d'').\end{aligned}$$

また，internal hom は $\mathcal{C}$ と同様 $[d, d']$ で定義できる．これは，

$$\begin{tikzcd} \mathcal{C} \arrow[r, shift left=1.5, "d \otimes_{\mathcal{C}} (-)"] \arrow[r, phantom, "\perp"] & \mathcal{C} \arrow[l, shift left=1.5, "{[d, -]}"] \arrow[r, bend left, "\mathrm{r}"] \arrow[r, phantom, "\perp"] & \mathcal{D} \arrow[l, hook', shift left=1.5, "\iota"] \end{tikzcd}$$

なる随伴の $[d, \iota -]$ の像が (i) により $\mathcal{D}$ に制限できることから従う． □

2 Example: Essentially Algebraic Theories

それでは，この定理から具体的に作られる SMCC 構造の例を見ていこう．この章では，reflection が代数的な[*1] 理論の間の theory morphism が誘導する左随伴として与えられるものの例を挙げる．[*2]

先の定理で特に (ii) の条件は，確かめやすく使い勝手が良いことを記しておこう．

Example 2.1. 可換モノイドの圏 **CMon** は，双線形写像に関して普遍性を持つテンソル積を持ち，このテンソルで SMCC になる．アーベル群の圏は，可換モノイドの圏の reflective subcategory [*3] で，reflection は形式的に逆元を追加して，適切に割ることで与えられる．Reflection は普遍性から $\mathbf{CMon}(M, G) \cong \mathbf{Ab}(rM, G)$ で，ここに入る和の構造はともに G に由来するものなので，$[M, G] \cong [rM, G]$．よって，**Ab** にも SMCC 構造が入る． ■

Example 2.2. 可換モノイドの公理に idempotency $x \cdot x = x$ を追加したものは，join semilattice とみなせる．ゆえに join semilattice の圏 $\vee$-**SLat** は，可換モノイドの圏の reflective subcategory で，reflection は $x \cdot x = x$ を満たすように割ることで与えられる．この reflection から，$\vee$-**SLat** にも SMCC 構造が入る． ■

Example 2.3. 対象が 2 つで並行な 2 つの非自明な射 $d, c \colon 1 \rightrightarrows 0$ がある圏の presheaf 圏 $\mathbf{Set}^{\rightrightarrows}$ を **Quiv** とする．Presheaf category はいつも Cartesian closed category (CCC) になる．この圏の reflective subcategory として，集合 X と その上の関係 $R \subseteq X \times X$ の組 (X, R) 対象とし，射を関係を保つ写像とする圏 **BRel** が取れる[*4]. Reflection は，quiver に対して $X_1 \xrightarrow{\langle c,d \rangle} X_0 \times X_0$ の image factorization を取ることで与えられる．この reflection は product を保つので，(iv) の条件が確かめる． ■

[*1] 正確には essentially algebraic
[*2] Gabriel-Ulmer duality [GU71] や partial Horn logic [PV07] などによる随伴で得られるもののこと
[*3] 可換モノイドを与える theory を，逆元をとる partial function が備わっていると考えれば，アーベル群はこの逆元をとる partial function が必ず全域関数になるよう，同じ signature のまま公理を強めたものとみなせる [Kaw23, Example 4.22.]
[*4] これも monic になるように essentially algebraic theory の公理を強めたものと見れる．

Example 2.4. 同様に，無向単純グラフ (ループなし) の圏 **Graph**，同値関係の圏 **Equiv** なども CCC になる． ■

Example 2.5. 実は **Quiv** には CCC 以外の SMCC 構造も入る．2 つの quiver $X_1 \rightrightarrows X_0$ と $Y_1 \rightrightarrows Y_0$ のテンソル積を

$$\begin{aligned}(X \otimes Y)_1 &= X_1 \times Y_0 + X_0 \times Y_1 \\ (X \otimes Y)_0 &= X_0 \times Y_0 \\ d_{X \otimes Y} &= [d \times 1, 1 \times d] \\ c_{X \otimes Y} &= [c \times 1, 1 \times c]\end{aligned}$$

で定める．また，internal hom $[X, Y]$ を，$[X, Y]_0 = \mathbf{Quiv}(X, Y)$，$f$ から g への edge が $\{\alpha_x \colon fx \to gx\}_{x \in X}$ なる edge の族になるように定める．すると，このテンソル積と internal hom は **Quiv** に SMCC の構造を与える．

Quiv の reflective subcategory の **BRel**，**Graph**，**Equiv** の全てに，Day's reflection theorem から SMCC 構造を与えられる．ただし，この中で **Equiv** に関してだけは，この SMCC 構造は CCC と一致する． ■

3 Example: 2-dimensional Analogues

そして 2 つほど，2 圏論的に適切に弱めた Day's reflection theorem らしきものが観察できる例を挙げよう．本文以下では，厳密な議論を省き，直感的な説明に留める．

Example 3.1. $\mathcal{V}$ を Bénabou cosmos とする．2 圏 $\mathcal{V}$-**Cat** の中で，Cauchy complete なものたちからなる full sub-2-category $\mathcal{V}$-**Cauchy** を考える．すると，$\mathcal{V}$-**Cauchy** から $\mathcal{V}$-**Cat** への包含関手には，Cauchy completion によって，left biadjunction が与えられる．確かに，元々 Cauchy complete なものたちに対しては，Cauchy completion が同値な圏を与えるため，おおよそ reflective sub-2-category をあたえることになることがわかる．

$\mathcal{V}$-**Cat** は symmetric monoidal 2-category であり，$\mathcal{C}$ が Cauchy complete $\mathcal{V}$-category なら，$[\mathcal{A}, \mathcal{C}] \simeq [\bar{\mathcal{A}}, \mathcal{C}]$ であるから，Day's reflection theorem と似た状況が得られていることが観察できる．ゆえに，$\mathcal{V}$-**Cat** 上にできた Cauchy completion の monad がある弱い意味で lax monoidal になることが期待できる．ゆえに Cauchy completion は $\mathcal{V}$-**Cat** における pseudo monoid を pseudo monoid に写す，つまり monoidal $\mathcal{V}$-category の Cauchy completion も monoidal $\mathcal{V}$-category の構造を持つことが期待できる．実際これは正しく，[Bae23] に結果が用いられている． ■

Example 3.2. あまり知られていないかと思われるが，symmetric monoidal category，(strong) monoidal functor，monoidal natural transformation からなる 2 圏 **SymMonCat** は，symmetric monoidal closed 2-category になる [Sch08] [*5]．この internal hom $[\mathcal{A}, \mathcal{B}]$ は，関手圏 $[\mathcal{A}, \mathcal{B}]$ に $\mathcal{B}$ のテンソル積で入る monoidal 構造を入れた自然なもので，テンソル積 $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ は，$\mathcal{A} \times \mathcal{B}$ からの関手で適切に定義した "双線形" なものに対して普遍性を持つものである．

[*5] 1-cell を strict monoidal に制限しなくとも，**SymMonCat** に入る coherence law が強い意味で可換になることはかなり非自明である．

この 2 圏 **SymMonCat** の中で，tensor unit が terminal object である (Affine monoidal category と呼ばれる) ものからなる full sub-2-category **AffineCat** を考える．この **AffineCat** は，前章で theory の translation で reflection を作ることができたことの 2 次元版を考えることで，**SymMonCat** のおおよそ reflective subcategory になる．正確には，前の例と同様 left biadjunction が与えられる．この例でも $[\mathcal{A}, \mathcal{C}] \simeq [L\mathcal{A}, \mathcal{C}]$ が言えるので，Affine 化は **SymMonCat** 上の lax monoidal な monad が期待できる．**SymMonCat** における pseudo monoid は rig category と呼ばれており，Affine 化は rig category を rig category に写すと予想できる．これは実際正しく，[HK22] で具体的に示されている． ■

どうだろうか．最後の 2 つの例は厳密には Day's reflection theorem から従うものではないが，かなり多くの例で見られる現象が 1 つの定理の系として考えられるというのは面白いのではないだろうか．

参考文献

[Bae23] J. Baez. "The Free 2-Rig on One Object." https://golem.ph.utexas.edu/category/2023/10/the_free_2rig_on_one_object.html, 2023.

[Day70] B. Day. "On closed categories of functors." In: *Reports of the Midwest Category Seminar IV*. Springer Berlin Heidelberg, Berlin, Heidelberg, pp. 1–38. doi: 10.1007/BFb0060438.

[Day72] B. Day. "A reflection theorem for closed categories." *Journal of Pure and Applied Algebra*, 1972. vol. 2(1):pp. 1–11. doi: 10.1016/0022-4049(72)90021-7.

[GU71] P. Gabriel and F. Ulmer. *Lokal α-präsentierbare Kategorien*, Springer Berlin Heidelberg, Berlin, Heidelberg, 1971. pp. 71–84. doi: 10.1007/BFb0059404.

[HK22] C. Heunen and R. Kaarsgaard. "Quantum Information Effects." *Proc. ACM Program. Lang.*, 2022. vol. 6(POPL). doi: 10.1145/3498663.

[Kaw23] Y. Kawase. "Birkhoff's variety theorem for relative algebraic theories." https://arxiv.org/abs/2304.04382, 2023.

[nLa23] nLab authors. "Day's reflection theorem." https://ncatlab.org/nlab/show/Day%27s+reflection+theorem, 2023. Revision 5.

[PV07] E. Palmgren and S. Vickers. "Partial Horn logic and cartesian categories." *Annals of Pure and Applied Logic*, 2007. vol. 145(3):pp. 314–353. doi: 10.1016/j.apal.2006.10.001.

[Sch08] V. Schmitt. "Tensor product for symmetric monoidal categories." https://arXiv.org/abs/0711.0324, 2008.