一般化された分配則としてのGrayテンソル積

Generalization of formal monad theory to lax functors

Kengo Hirata

修士論文の概要

1. 導入 (モナド <=> lax functor)
2. Recall: 形式モナド理論 (Section 3)
    A. モナドと随伴
    B. モナドの分配則
3. Lax functor への一般化
    A. Lax 教義的随伴 (Section 4)
       この節の内容はすでにあった結果だったと判明.
    B. 一般化分配則 (Section 5)

Bicategory 間の lax functor

Bicategories $\mathscr{C}$, $\mathscr{D}$ 間の lax functor $F\colon \mathscr{C} \rightsquigarrow \mathscr{D}$ とは, 2圏論的に関手の定義を緩めたもの, つまり

- $\mathscr{C}$ の 0,1,2-cell を $\mathscr{D}$ の 0,1,2-cell に移すが,
- 1-cell の水平合成を up to comparison maps でしか保たない.

つまり、下の図のような 2-cell たちであって

$$
\begin{tikzcd}
& FB \arrow[dr, "Fg"] & \\
FA \arrow[ur, "Ff"] \arrow[rr, bend right, "F(gf)"'] \arrow[rr, phantom, "\Downarrow F^2_{f,g}"] & & FC
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
FC \arrow[r, bend left, "1_{FC}"] \arrow[r, bend right, "F1_C"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow F^0_C"] & FC
\end{tikzcd}
$$

いくつかの公理を満たすものがある.

モナドは lax functor

Bicategory $\mathscr{D}$ の モナド とは,

- 1-cell $t\colon A \to A$
- multiplication 2-cell
  $\mu\colon tt \Rightarrow t$
- unit 2-cell $\eta\colon 1_A \Rightarrow t$

$$
\begin{tikzcd}
 & A \arrow[dr, "t"] \arrow[d, phantom, "\Downarrow\mu"] & \\
A \arrow[ur, "t"] \arrow[rr, bend right, "t"'] & {} & A
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
A \arrow[r, bend left, "1_A"] \arrow[r, bend right, "t"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\eta"] & A
\end{tikzcd}
$$

であって，右の公理を満たすものである.

$$
\begin{tikzcd}
 & A \arrow[dr, "t"'] \arrow[dr, bend left, "1_A"] \arrow[dr, phantom, bend left=20, "\Downarrow\eta"] \arrow[d, phantom, "\Downarrow\mu"] & \\
A \arrow[ur, "t"] \arrow[rr, bend right, "t"'] & {} & A
\end{tikzcd}
\quad = \quad 1_t
$$

$$
\begin{tikzcd}
 & A \arrow[dr, "t"] \arrow[d, phantom, "\Downarrow\mu"] & \\
A \arrow[ur, bend left, "1"] \arrow[ur, "t"'] \arrow[ur, phantom, bend left=20, "\Downarrow\eta"] \arrow[rr, bend right, "t"'] & {} & A
\end{tikzcd}
\quad = \quad 1_t
$$

$$
\begin{tikzcd}
 & {} \arrow[r, "t"] \arrow[drr, "t"'] & {} \arrow[dr, "t"] \arrow[d, phantom, "\Downarrow\mu"] & \\
{} \arrow[ur, "t"] \arrow[rrr, bend right, "t"'] & {} \arrow[r, phantom, "\Downarrow\mu"] & {} & {}
\end{tikzcd}
\quad = \quad
\begin{tikzcd}
 & {} \arrow[r, "t"] \arrow[d, phantom, "\Downarrow\mu"] & {} \arrow[dr, "t"] & \\
{} \arrow[ur, "t"] \arrow[urr, "t"'] \arrow[rrr, bend right, "t"'] & {} \arrow[r, phantom, "\Downarrow\mu"] & {} & {}
\end{tikzcd}
$$

これは lax functor $\bar{t}\colon \mathbf{1} \rightsquigarrow \mathscr{D}$ と同じデータからなる

Lax functors はモナドの一般化

- Lax functor $\bar{t}\colon \mathbf{1} \rightsquigarrow \mathscr{D}$ は モナド.
- $\mathscr{M}$: モノイダル圏として、特に対象が 1 つの bicategory $\Sigma\mathscr{M}$ とみる. このとき, lax functor $\Sigma\mathscr{M} \rightsquigarrow \mathscr{D}$ は 次数付きモナド.
- $\mathbb{B}$, $\mathbb{C}$: 圏として, $\mathrm{End}(\mathbb{C})$ 自己関手のモノイダル圏とする. このとき 圏で次数付けられたモナド とは, lax functor $\mathbb{B} \rightsquigarrow \Sigma\mathrm{End}(\mathbb{C})$ のことである.

Question

Lax functor はどの程度モナドと同様に振る舞うのか?

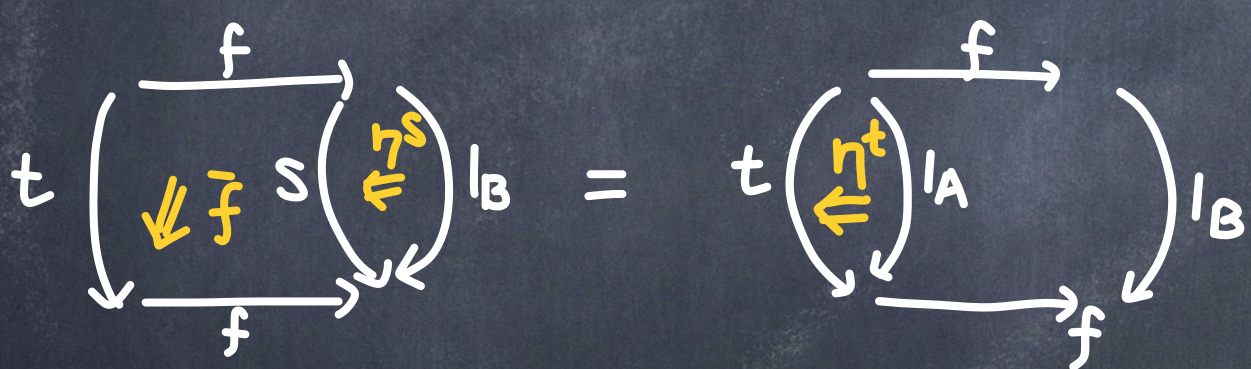
Key idea: “モナド” を “lax functor $\mathbf{1} \rightsquigarrow \mathscr{D}$”
に言い換える。
(自明ではない)

monad (1): モナドの 2 圏

モナド $t\colon A \to A$ から $s\colon B \to B$ への Lax monad morphism $(f, \bar{f})$ とは, 1-cell $f\colon A \to B$ と次の 2-cell

$$
\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "t"'] \arrow[dr, phantom, "\Downarrow \bar{f}"] & B \arrow[d, "s"] \\
A \arrow[r, "f"'] & B
\end{tikzcd}
$$

の組であって μ と η と compatible なもの.



Lax monad morphism 間の 2-cell $\alpha\colon (f, \bar{f}) \Rightarrow (g, \bar{g})$ とは 2-cell $\alpha\colon f \Rightarrow g$ であって $\bar{f}$ と $\bar{g}$ と compatible なもの.

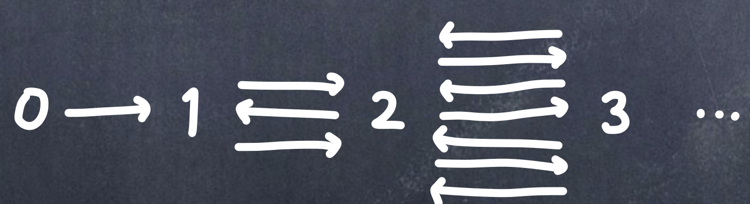
$\mathscr{K}$ のモナドの 2 圏を $\mathrm{mnd}_l(\mathscr{K})$ とかくことにする.

一般化 (1): lax functor の 2圏

Notation. w-functor と w'-変換の 2圏を ${}^{w}_{w'}[\mathscr{A},\mathscr{K}]$ と書くことにする.

e.g.) ${}^{2}_{L}[\mathscr{A},\mathscr{K}]$ = 2-functor + lax 変換 + modification.

Augmented simplex category Δ_a を自然数 $\{0,1,2,\ldots\}$ を対象とし，順序を保つ写像を射とする圏とする.



モナドの free 2-category **Mnd** を対象が一つで hom-category が Δ_a であるものとする.

Prop. $\mathscr{K}$: 2-圏とする. $\mathscr{K}$ のモナドの 2圏は次のように表せる

$$\mathrm{mnd}_l(\mathscr{K}) \cong {}^{L}_{L}[\mathbf{1},\mathscr{K}] \cong {}^{2}_{L}[\mathbf{Mnd},\mathscr{K}]$$

より一般に…

Thm. 任意の $\mathscr{C}$: bicategory に対して, ある lax functor classifier と呼ばれる 2-圏 $\overline{\mathscr{C}}$ があって、次の普遍性を持つ.

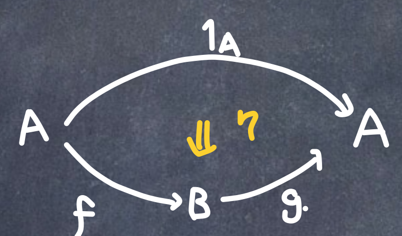
$${}^{L}_{w}[\mathscr{C},\mathscr{K}] \cong {}^{2}_{w}[\overline{\mathscr{C}},\mathscr{K}]$$

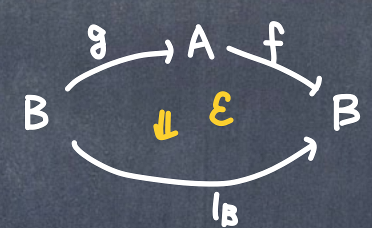
$(\ \overline{\mathbb{1}} \cong \mathbb{M}\mathrm{nd}\ )$

モナド (2): 随伴との関係

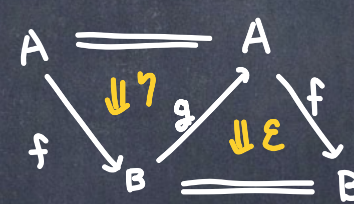
$\mathscr{C}$ における随伴 $f \dashv g$ とは:

- 1-cells $f\colon A \to B$ と $g\colon B \to A$
- 2-cells ε and η

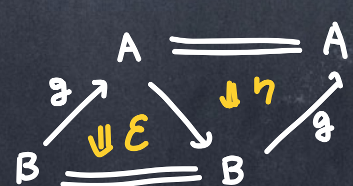




であって三角恒等図式を満たすもの.



= 1_f ,



= 1_g

Prop. 任意に随伴 $f \dashv g$ が与えられるとモナド gf が得られる.

unit =

multiplication =

Prop. 2-圏 $\mathscr{A}$ が十分に極限/余極限を持つとき, $\mathscr{A}$ における任意のモナドは Eilenberg-Moore/Kleisli 随伴から得られる.

Prop. 右随伴たちの 2-圏 $\mathrm{radj}(\mathscr{K})$ を $\mathscr{K}^{\to}$ の充満部分2圏で定める. もし $\mathscr{K}$ が任意の Eilenberg-Moore 対象を持つなら, $\mathrm{mnd}_l(\mathscr{K})$ は $\mathrm{radj}(\mathscr{K})$ の反映的部分2圏である.

一般化 (2): lax 教義的随伴との関係

(これは本論文の Section 4 にあたる内容であるが，Steve Lack の '14 年の論文 "Morita contexts as lax functors" とほとんど同じ内容であることが判明した.)

ある 2-comonad であって, lax coalgebras と lax morphisms の 2圏が ${}^{L}_{L}[\mathscr{A}, \mathscr{K}]$ になるものがある．本お論文では 2-monad 理論の議論から，以下のRoss Street の論文 "Two constructions on lax functors" で発見された事実をより一般的に示した.

次のようなデータを考える: (ここでは便宜上各点随伴と呼ぶことにする)

- 2-functor $\overline{F}\colon \mathscr{A} \to \mathscr{K}$,
- 随伴の族 $FA \mathrel{\substack{\longrightarrow \\ \perp \\ \longleftarrow}} \overline{F}A$ $(A \in \mathscr{A})$.

この 各点随伴 と lax functor の関係は, ほとんど 随伴とモナド の関係と同じである. すなわち, …

一般化 (2): lax 教義的随伴との関係

<u>Thm.</u> 任意の各点随伴 $FA \underset{r_A}{\overset{l_A}{\rightleftarrows}} \overline{F}A$ は次のように定義される lax functor $F\colon \mathscr{A} \to \mathscr{K}$ を誘導する.

	$\mathscr{A}$		$\mathscr{K}$
object	A	$\longmapsto$	FA
1-cell	$f: A \to B$	$\longmapsto$	$FA \xrightarrow{l_A} \overline{F}A \xrightarrow{\overline{F}f} \overline{F}B \xrightarrow{r_B} FB$
2-cell	$\alpha: f \Rightarrow B$	$\longmapsto$	$r_B \,.\, \overline{F}\alpha \,.\, l_A$

comparison 2-cell

$$F^2_{f,g} : \quad \begin{tikzcd} \cdot \arrow[r, "l_A"] & \cdot \arrow[r, "\overline{F}f"] & \cdot \arrow[rr, bend right, equal] \arrow[r, "r_B"] & \cdot \arrow[r, "l_B"] \arrow[d, phantom, "\Downarrow \varepsilon_B"] & \cdot \arrow[r, "\overline{F}g"] & \cdot \arrow[r, "r_C"] & \cdot \end{tikzcd}$$

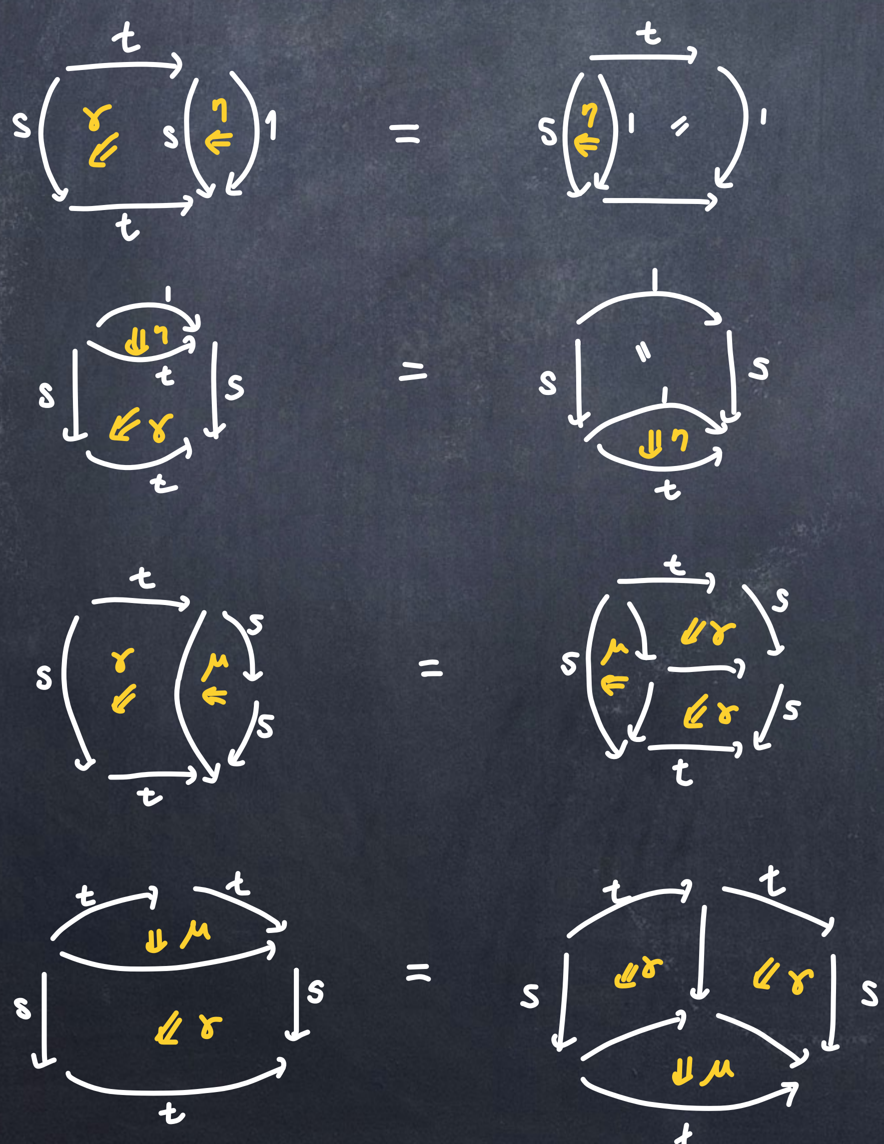
$$F^0_A : \quad \begin{tikzcd} FA \arrow[rr, bend left, equal] \arrow[dr, "l_A"'] & \Downarrow \eta_A & FA \\ & \overline{F}A \arrow[ur, "r_A"'] & \end{tikzcd}$$

<u>Thm.</u> $\mathscr{K}$: 完備な 2-圏, $\mathscr{A}$: 小さい2圏 とする. 任意に lax functor $F\colon \mathscr{A} \rightsquigarrow \mathscr{K}$ が与えられたとき, Eilenberg-Moore 2-functor と呼ばれる 2-functor $\mathscr{R}F\colon \mathscr{A} \to \mathscr{K}$ があって, F を誘導する各点随伴$FA \rightleftarrows \mathscr{R}FA$ が得られる.

<u>Thm.</u> ${}^{L}_{L}[\mathscr{A}, \mathscr{K}]$ は各点随伴の 2 圏の 反映的部分2圏 である.

モナド (3): 分配則

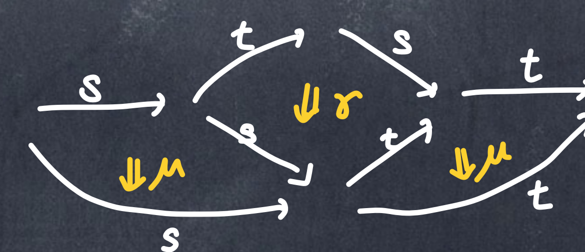
s, t : $\mathscr{K}$ における対象 A の上のモナドとする. s の上の t の 分配則とは, 2-cell $\gamma\colon st \Rightarrow ts$ であって次を満たすもの:



Prop. $\gamma\colon st \Rightarrow ts$ を分配則とする. このとき, ts の上に t と s の合成と呼ばれるモナドの構造が, 次で誘導される.

Unit

Multiplication



モナド (3): 分配則

Thm. [Beck69] t, s: 対象 A の上のモナドとする. 以下は全て同じデータを持つ.

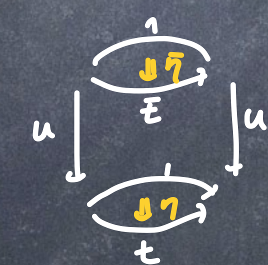
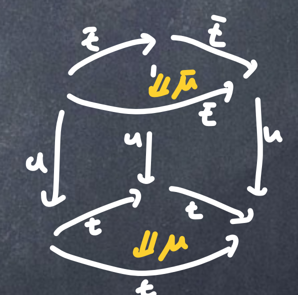
1. 分配則 $\gamma\colon st \Rightarrow ts$.

2. モナドの 2圏 $\mathrm{mnd}_l(\mathscr{K})$ のモナド.

3. モナド t の Eilenberg-Moore object A^s への リフト $\bar{t}$.

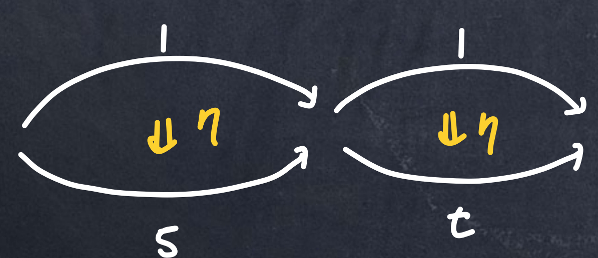
   monad $(\bar{t}, \bar{\eta}, \bar{\mu})$ on A^s s.t.

$$\begin{tikzcd} A^s \arrow[r, "\bar{t}"] \arrow[d, "u"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & A^s \arrow[d, "u"] \\ A \arrow[r, "t"'] & A \end{tikzcd}$$

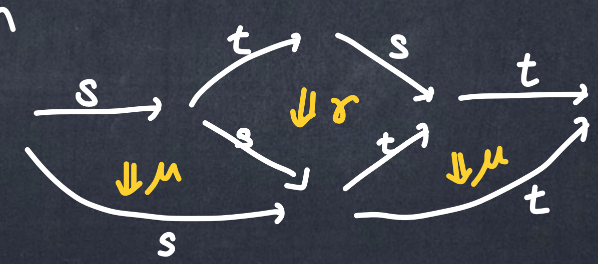
,  , 

4. 2-cell $\gamma\colon st \Rightarrow ts$ であって, ts を下の方法でモナドにするもの.

Unit



Multiplication



一般化 (3): 一般化分配則

Thm. [Gray74] 2圏たちからなる (通常の) 圏 2-Cat_0 の上に, lax Gray テンソル積 $\otimes_l$ と呼ばれる (非対称)モノイダル圏の構造で、次の左右の閉構造を持つものがある.

$$\mathscr{A} \otimes_l (-) \quad \dashv \quad {}^2_L[\mathscr{A}, -]$$

$$(-) \otimes_l \mathscr{B} \quad \dashv \quad {}^2_{Op}[\mathscr{B}, -].$$

$\mathscr{K}$ における分配則は $\mathrm{mnd}_l(\mathscr{K})$ におけるモナドであった. ゆえに, 分配則たちの 2 圏が, 次で表せる.

$${}^2_L\left[\mathbf{Mnd}, {}^2_L\left[\mathbf{Mnd}, \mathscr{K}\right]\right] \cong {}^2_L\left[\mathbf{Mnd} \otimes_l \mathbf{Mnd}, \mathscr{K}\right]$$

これは次とも同型.

$${}^2_L\left[\bar{\mathbf{1}}, {}^2_L\left[\bar{\mathbf{1}}, \mathscr{K}\right]\right] \cong {}^2_L\left[\bar{\mathbf{1}} \otimes_l \bar{\mathbf{1}}, \mathscr{K}\right]$$

一般化 (3): 一般化分配則

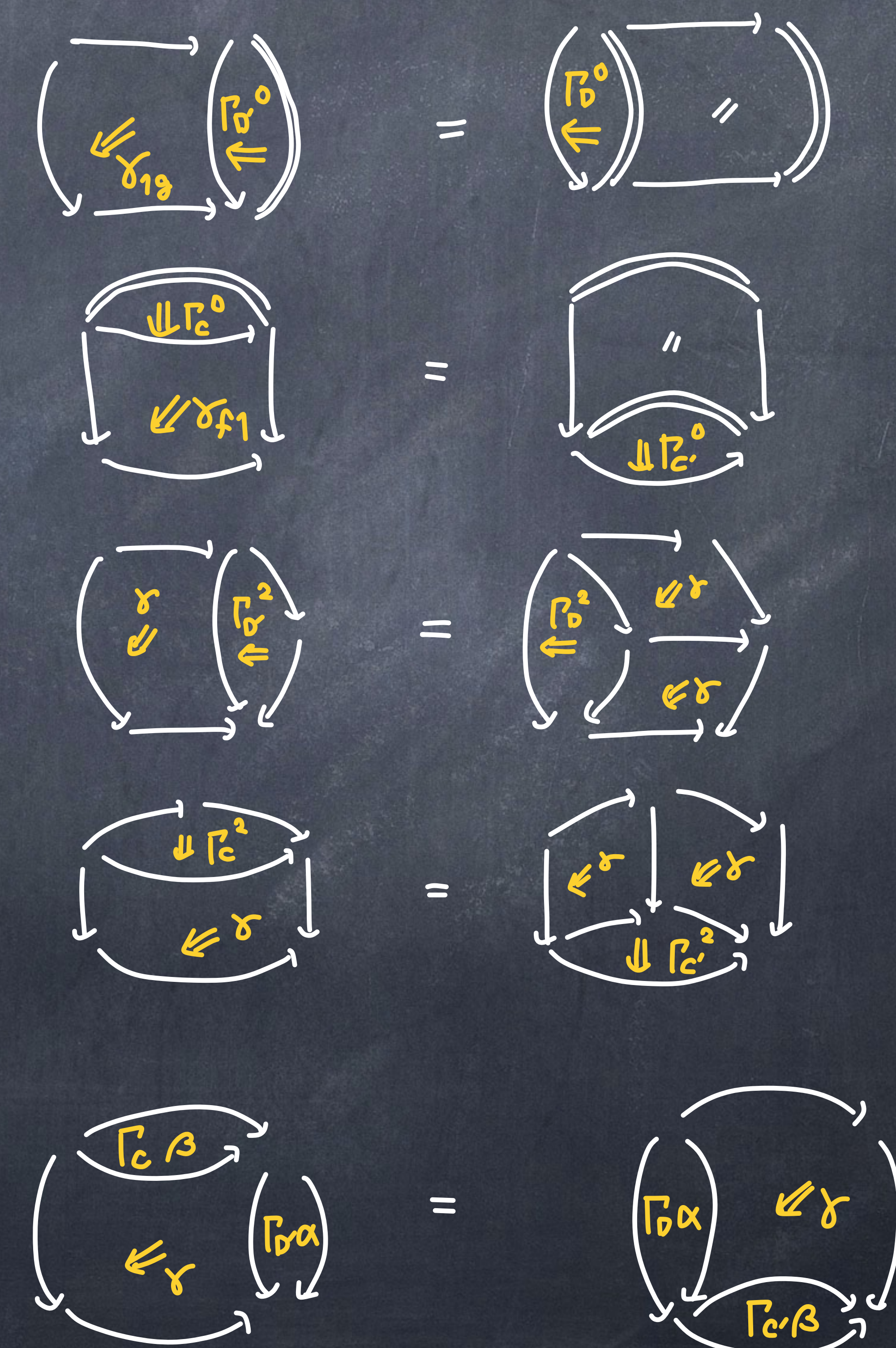
Def. [Nikolić19] $\mathscr{K}$ の一般化分配則とは, $\overline{\mathscr{C}} \otimes_l \overline{\mathscr{D}}$ から $\mathscr{K}$ への 2-functor のことである. これは, lax functor $\mathscr{D} \rightsquigarrow {}^L_L[\mathscr{C}, \mathscr{K}]$ と等価である.

これは次のデータとも等価:

- Lax functor $\Gamma(C, -): \mathscr{D} \rightsquigarrow \mathscr{K}$
- Lax functor $\Gamma(-, D): \mathscr{C} \rightsquigarrow \mathscr{K}$
- 各 1-cell の組 ($f: C \to C'$, $g: D \to D'$) に対して次の 2-cell があり

$$\begin{tikzcd}
\Gamma_{CD} \arrow[r, "\Gamma_{Cg}"] \arrow[d, "\Gamma_{fD'}"'] \arrow[dr, phantom, "\Swarrow \gamma_{f,g}"] & \Gamma_{CD'} \arrow[d, "\Gamma_{fD'}"] \\
\Gamma_{C'D} \arrow[r, "\Gamma_{C'g}"'] & \Gamma_{C'D'}
\end{tikzcd}$$

次を満たすもの



Lax functor classifier と lax Gray テンソル積

Prop. $\mathscr{A}$ を 2-functor ${}^{2}_{L}[\mathscr{A}, -]$ に送る関手は，strict モノイダル関手 $(2\text{-Cat}_0,\ \otimes_l, \mathbf{1}) \to \left({}^{2}_{2}[2\text{-Cat}, 2\text{-Cat}], \circ, \mathrm{Id}\right)$ を定める.

Thm. $(\mathbf{BiCat}_0^{\mathrm{Lax}}, \times, \mathbf{1})$ と $(2\text{-}\mathbf{Cat}_0,\ \otimes_l, \mathbf{1})$ の間に以下の lax/oplax モノイダル随伴がある.

$$\overline{\mathcal{E}} \dashv \mathcal{E}$$

$$\begin{tikzcd} 2\text{-Cat}_0 \arrow[rr, bend right, "\text{lax}", "\text{inclusion}"'] \arrow[rr, phantom, "\perp"] & & \mathrm{BiCat}_0^{\mathrm{Lax}} \arrow[ll, bend right, "\text{oplax}"'] \end{tikzcd}$$

Cor. 任意の bicategory $\mathscr{C}$ に対し，その lax functor classifier $\overline{\mathscr{C}}$ には自然な lax Gray テンソルに関するコモノイド構造があり，それにより，2-Cat 上の 2-monad ${}^{2}_{L}[\overline{\mathscr{C}}, -]$ が得られる.

2-monad ${}^2_L[\overline{\mathscr{C}}, -]$

$\mathscr{C} = \mathbf{1}$ のときは, 2-monad ${}^2_L[\overline{\mathbf{1}}, -]$ は $\mathrm{mnd}_l(\mathscr{K})$ と同型であった.

この multiplication は, モナドの合成で与えられていた.

$$\mathrm{mnd}_l(\mathrm{mnd}_l(\mathscr{K})) \;\to\; \mathrm{mnd}_l(\mathscr{K})$$

分配則 ↦ 合成された monad

2-monad ${}^2_L[\overline{\mathscr{C}}, -]$ の multiplication は, モナドの合成の一般化とみることができる.

$${}^L_L[\mathscr{C}, {}^L_L[\mathscr{C}, \mathscr{K}]] \;\to\; {}^L_L[\mathscr{C}, \mathscr{K}]$$

一般化分配則 ↦ “合成された” lax functor

Eilenberg-Moore と一般化分配則

$\mathscr{A}$, $\mathscr{B}$: 2-圏, $\Gamma\colon \overline{\mathscr{A}} \otimes_l \overline{\mathscr{B}} \to \mathscr{K}$: 一般化分配則とする.
$\Gamma'\colon \mathscr{B} \rightsquigarrow {}^L_L[\mathscr{A}, \mathscr{K}]$ を対応する lax functor とする.

Thm. 以下の全ては (同型を除いて) 同じ $\mathscr{A} \times \mathscr{B}$ からの 2-functor を定める.

1. 次の合成の Eilenberg-Moore 2-functor
$$\mathscr{B} \overset{\Gamma'}{\rightsquigarrow} {}^L_L[\mathscr{A}, \mathscr{K}] \xrightarrow{EM=\mathscr{R}} {}^2_2[\mathscr{A}, \mathscr{K}].$$

2. 合成 $\mathscr{B} \xrightarrow{\mathscr{R}\Gamma'} {}^L_L[\mathscr{A}, \mathscr{K}] \xrightarrow{EM} {}^2_2[\mathscr{A}, \mathscr{K}].$

3. 次の合成の Eilenberg-Moore 2-functor
$$\mathscr{A} \times \mathscr{B} \overset{J}{\rightsquigarrow} \overline{\mathscr{A}} \otimes_l \overline{\mathscr{B}} \xrightarrow{\Gamma} \mathscr{K}.$$

J: canonical lax functor
$A \times B \rightsquigarrow \bar{A} \otimes_l \bar{B}$

Conclusion

形式モナド理論の lax functor への一般化を研究した.

- Steve Lack の論文 "Morita contexts as lax functors" の Section 8 を再発見した.
- 一般化分配則に関連するいくつかの主張を示した:
  - $(\mathbf{BiCat}_0^{\mathrm{Lax}}, \times, \mathbf{1})$ と $(2\text{-}\mathbf{Cat}_0, \otimes_l, \mathbf{1})$ の間の lax/oplax モノイダル随伴を発見し, $\overline{\mathscr{C}}$ 上の自然なコモノイド構造を発見した.
  - Lax functor に対する Eilengerg-Moore 構成との関連を調べた.