Φ-極限

K.Hirata

December 3, 2023

概要

この pdf は 圏論 Advent Calendar 2023 の 3 日目のエントリとして書かれました．圏論における極限について議論します．

目次

1 極限とは

圏論の図式に対して “普遍的な対象” を表すものとしての極限の定義は本当に十分だろうか．

極限の定義は，次のようなものであった．

Definition 1.1. 圏 $\mathcal{C}$ の図式 $D = \left(\{C_i \in \mathcal{C}\}_{i \in I}, \{f_j \colon C_{a_j} \to C_{b_j}\}_{j \in J}\right)$ に対して，その**錐 (cone)** とは，対象 X と射の族 $\{\alpha_i \colon X \to C_i\}$ のことであって，任意の $j \in J$ に対して $f_j \circ \alpha_{a_j} = \alpha_{b_j}$ となるもののことである．

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[dl, "\alpha_{a_j}"'] \arrow[dr, "\alpha_{b_j}"] & \\ C_{j_0} \arrow[rr, "f_j"'] & & C_{j_1} \end{tikzcd}$$

D の**極限** (limit) とは，D の錐 $(L, \{\pi_i \colon L \to C_i\})$ であって，任意の錐 $(X, \alpha_i \colon X \to C_i)$ に対して，一意的に射 $u \colon X \to L$ が存在して，$\alpha_i = \pi_i \circ u$ となるもののことである．

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "u"] \arrow[dr, "\alpha_i"'] & & L \arrow[dl, "\pi_i"] \\ & C_i & \end{tikzcd}$$

■

しかしこの定義では，以下に挙げる“普遍的な対象”は極限とは言えないことに気づく[*1].

Example 1.2 (kernel pair)**.** 圏 $\mathcal{C}$ の射 $f\colon C_0 \to C_1$ に対して，射の組 $k, h\colon X \rightrightarrows \mathcal{C}_0$ であって，$fk = fh$ を満たすものを **Kernel pair の筒 (cylinder)**[*2]と呼ぶことにする．また，X を筒の**頂点**と呼ぶことにしよう．

$$
\begin{tikzcd}
 & X \arrow[dl, shift right, "k"'] \arrow[dl, shift left, "h"] \arrow[dr, "fk = fh"] & \\
C_0 \arrow[rr, "f"'] & & C_1
\end{tikzcd}
$$

射 f の **kernel pair** とは，筒 (L, π_k, π_h) であって，任意の筒 (X, k, h) に対して，一意的に射 $u\colon X \to L$ が存在して，$k = \pi_k \circ u$ かつ $h = \pi_h \circ u$ となるもののことである．

$$
\begin{tikzcd}
X \arrow[rr, "u"] \arrow[dr, shift right, "k"'] \arrow[dr, shift left, "h"] & & L \arrow[dl, shift right, "\pi_k"'] \arrow[dl, shift left, "\pi_h"] \\
 & C_0 &
\end{tikzcd}
$$

Kernel pair は，**正則圏**の理論において重要な役割を果たす． ■

Example 1.3 (power)**.** 圏 $\mathcal{C}$ の対象 C と集合 S に対して，射の族 $\{\alpha_s\colon X \to C\}_{s\in S}$ を S**-power の筒**とよぶことにする．このときも X を頂点と呼ぼう．

$$
\begin{tikzcd}
X \arrow[d, shift right=2, "\alpha_s"'] \arrow[d, shift left=2] \arrow[d, phantom, "\cdots"] \\
C
\end{tikzcd}
$$

対象 C の S**-power** とは，筒 $(L, \{\pi_s\colon L \to C\}_{s\in S})$ であって，一意的に射 $u\colon X \to L$ が存在して，$\alpha_s = \pi_s \circ u$ となるもののことである．

$$
\forall s \in S,\quad
\begin{tikzcd}
X \arrow[rr, "u"] \arrow[dr, "\alpha_s"'] & & L \arrow[dl, "\pi_s"] \\
 & C &
\end{tikzcd}
$$

この power は同じ対象 C たちの積 $\prod_{s\in S} C$ としても定義できる．ただし power が存在して積が存在しない圏の例は多くある．例えば $S \neq \emptyset$ のとき S-power を持つ圏 $\mathcal{C}_0, \mathcal{C}_1$ の直和圏 $\mathcal{C}_0 + \mathcal{C}_1$ もまた S-power A が，$\mathcal{C}_0 + \mathcal{C}_1$ は $C_i \in \mathcal{C}_i$ の直積 $C_0 \times C_1$ を持たない．具体的には離散圏 $(X_{\mathrm{dis}} \cong \coprod_{x\in X} \mathbb{1})$ や $\mathbf{Set} + \mathbf{Set}$ などが例になる． ■

Example 1.4. 圏 $\mathcal{C}$ の span とは，$C_0 \leftarrow C' \to C_1$ なる図式のことである．このとき，射の組 $C_0 \xleftarrow{\alpha_0} X \xrightarrow{\alpha_1} C_1$ をこの **span の中抜き筒**[*3]と呼ぶことにする．

$$
\begin{tikzcd}
 & X \arrow[dl, "\alpha_0"'] \arrow[dr, "\alpha_1"] & \\
C_0 & C' \arrow[l] \arrow[r] & C_1
\end{tikzcd}
$$

[*1] 少なくとも純粋には極限という言葉だけでは説明できない，の意味．
[*2] cylinder の他の訳語が既にあれば教えていただきたい．
[*3] これはここだけの用語である．

ただしこの図は何の可換性も言わないことに注意する．

span の中抜き極限とは，筒 (L, π_0, π_1) であって，任意の筒 (X, α_0, α_1) に対して，一意的に射 $u\colon X \to L$ が存在して，$\alpha_0 = \pi_0 \circ u$ かつ $\alpha_1 = \pi_1 \circ u$ となるもののことである．

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[dl, bend right, "\alpha_0"'] \arrow[d, "u"] \arrow[dr, bend left, "\alpha_1"] & \\ & L \arrow[dl, "\pi_0"] \arrow[dr, "\pi_1"'] & \\ C_0 & C' \arrow[l] \arrow[r] & C_1 \end{tikzcd}$$

この L は積 $C_0 \times C_1$ に一致する．C' は普遍性には現れないので，C' は何の役割も果たしていないかのようにも見える．

この C' の役割を $\mathcal{C}$ が $\vee$-半束 (meet semilattice) であるとした時の場合で説明しよう． このとき，span $C_0 \leftarrow C' \rightarrow C_1$ は，$\mathcal{C}$ の元 C_0 と C_1 であって，何らかの共通の下界 C' が選ばれているものを表す．これに対して，span の中抜き極限は，この下界の選択によらず $\{C_0, C_1\}$ の下限を表している．つまり共通の下界の存在を図式で保証しているのである．実際 $\vee$-半束であって，任意の区間内の任意の反鎖の長さが有限であるようなものは，“共通の下界を持てば下限を持つ” という性質を持つようである [Hir21]．このような場合に，一般の積 $\wedge$ は存在するとは限らないが，span の中抜き極限は存在する，と言うことができる． ■

Example 1.5 (エンド)**.** 圏 $\mathcal{A}, \mathcal{C}$ に対して，関手 $P\colon \mathcal{A}^{\mathrm{op}} \times \mathcal{A} \to \mathcal{C}$ が与えられたとする．この P の**ウェッジ** (wedge) とは，頂点 X と射の族 $\{\alpha_A\colon X \to P(A, A)\}_{A \in \mathcal{A}}$ であって，任意の $f\colon A_0 \to A_1$ に対して，次が可換になるようなものである．

$$\begin{tikzcd} & P(A_1, A_1) \arrow[dr, "{P(f, \mathrm{id})}"] & \\ X \arrow[ur, "\alpha_{A_1}"] \arrow[dr, "\alpha_{A_0}"'] & & P(A_0, A_1) \\ & P(A_0, A_0) \arrow[ur, "{P(\mathrm{id}, f)}"'] & \end{tikzcd}$$

この関手 P の**エンド** (end) とは，ウェッジ (L, π_A) であって，任意のウェッジ (X, α_A) に対して，一意的に射 $u\colon X \to L$ が存在して，$\alpha_A = \pi_A \circ u$ となるもののことである．

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "u"] \arrow[dr, "\alpha_A"'] & & L \arrow[dl, "\pi_A"] \\ & P(A, A) & \end{tikzcd}$$

2 つの関手 $F, G\colon \mathcal{A} \rightrightarrows \mathcal{B}$ が与えられたとき，関手 $\mathcal{B}(F-, G-)\colon \mathcal{A}^{\mathrm{op}} \times \mathcal{A} \to \mathbf{Set}$ のエンドは，自然変換の集合 $\mathrm{Nat}(F, G)$ と各対象での評価 $\{\mathrm{Nat}(F, G) \xrightarrow{ev_A} \mathcal{B}(FA, GA)\}$ で与えられる． ■

本稿では，これらの例も含めた極限の定義を考える．

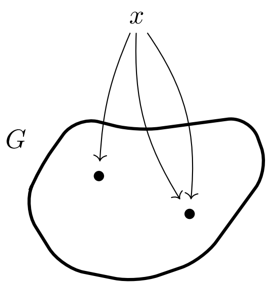
2 着想と定義

より正しく普遍性を表すために極限の定義を考え直そう．

まず，前節で挙げた例で現れていた筒の概念は，図式に対して一つ自動的に決まるものではなく，我々が欲しい普遍性に対して都度適切に与えなければならないことに気づく．Kernel pair example 1.2 の例を見てみよう．図式としては単に射 $f\colon C_0 \to C_1$ を選択するだけなのであった．この図式の錐は単に射 $\alpha\colon X \to C_0$ でその極限は C_0 になってしまう一方で，Kernel pair の筒は $k, h\colon X \rightrightarrows C_0$ なる射の組で条件を満たすものとして与えられている．

では一般に筒はどう定義するべきか．そもそも**図式の型** D とは，グラフ[*4] $G = (\{d_i\}, \{f_j\colon d_{a_j} \to d_{b_j}\})$ と可換性条件の集合 $E = \{f_{n_k} \circ f_{m_k} = f_{l_k}\}_k$ であって，圏 $\mathcal{C}$ での D **型の図式** $J\colon D \to \mathcal{C}$ とは，グラフ準同型であって，$\mathcal{C}$ において可換性条件を満たすもののことであった．筒は，$\mathcal{C}$ の頂点 X と，X から Jd_i へ好きな本数の**足** $X \to Jd_i$ を伸ばし，好きなように指定した可換性を満たすものとして定義したい．この考えを定式化すると次のようになるだろう．

Definition 2.1 (筒の型)**.** 図式の型 $D = (G, E)$ に対して，**筒の型** Ψ とは，頂点集合が $|E| \sqcup \{x\}$ で，x へ向かう辺はなく，$|E|$ 間の辺に対しては，G と一致するようなグラフ H と，始点が x になっている可換性条件の集合 $F = \{f_{u_i} \circ a_{s_j} = a_{t_j}\}$ の組である．



■

Definition 2.2 (筒)**.** 図式の型 D と D-型の図式 $J\colon D \to \mathcal{C}$ に対して，$\Psi = (H, F)$**-型の筒**とは，グラフ準同型 $H \to \mathcal{C}$ で，この D への制限が J と一致し，可換性条件 F を満たすもののことである．

頂点 x の像となる対象 X を筒の**頂点**と呼び，H において x から伸びる辺 $\{x \to d_{k_i}\}_i$ の像 $\alpha = \{\alpha_i\colon X \to C_{k_i}\}_i$ を筒の**足**と呼んで，筒をこの組 (X, α) で表示することにする． ■

そして，新しい極限の定義を，普遍的な筒として与えよう．

Definition 2.3 (極限)**.** D-型の図式の Ψ**-型の極限**とは，筒 (L, λ) であって，任意の筒 (X, α) に対して，一意的に射 $u\colon X \to L$ が存在して，$\alpha_i = \lambda_i \circ u$ となるもののことである． ■

従来の極限は，筒が錐になっているときの極限であるから，以降では**錐型の極限 (conical limit)** と呼ぶことにする．

3 より圏論的な同値な定義

さて，この定義を，より圏論的な言葉で言い換えることを目指そう．

[*4] ここでいうグラフとは，有限に限らない箙 (quiver)，つまり有向多重ループありグラフのことである．

まずグラフと可換性条件の組は，ひとつの圏で言い換えられる．つまり，グラフ G に対して，対象の集合が $|G|$，射の集合が G の道であるような圏をまず考え，可換性条件 E から生成される合同関係でそれを割り，得られた圏 $\mathcal{F}(G,E)$ を考える．この圏 $\mathcal{F}(G,E)$ からの関手 $\mathcal{F}(G,E) \to \mathcal{C}$ は，グラフ準同型 $G \to \mathcal{C}$ であって，その像で可換性条件 E を満たすものと一対一に対応する．この考え方で，図式とは単に**図式圏** $\mathcal{D}$ からの関手 $J\colon \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ とみなせる．

それでは，筒の型はどうなるだろうか．筒の型も圏とみなせば，充満部分圏に $\mathcal{D}$ と $\{x\} \cong \mathbb{1}$ をもち，これらの間には $x \to d_i$ の向きにのみ射があるような圏となる．この圏に対して，$\mathcal{D}$ の各対象に対して，射の集合 $P(d) = \{\ a_i \ \mid\ a_i\colon x \to d\ \}$ を考えよう．すると，任意の $\mathcal{D}$ の射 $f\colon d \to d'$ に対し，写像 $P(f)\colon P(d') \to P(d)$ が $\alpha_i \mapsto f \circ \alpha_i$ で定まり，P は関手 $\mathcal{D} \to \mathbf{Set}$ を定める．逆に，任意の関手 $P\colon \mathcal{D} \to \mathbf{Set}$ に対して，圏 $\overline{P}$ を，対象が $\mathrm{ob}(\mathcal{D}) \sqcup \{x\}$ とし，充満部分圏に $\mathcal{D}$ と $\{x\} \cong \mathbb{1}$ をもち，$\overline{P}(x,d) = P(d)$，$\overline{P}(d,x) = \emptyset$ となるように定めれば，筒の型を得ることができる．この対応で，筒の型を余前層 $\mathcal{D} \to \mathbf{Set}$ と言い換えることができる[*5]．ここまで筒の型と呼んでいたものを，ここからは**重み**と呼ぶことにし，余前層 $\mathcal{D} \to \mathbf{Set}$ として表示する．

では圏 $\mathcal{C}$ における筒は何になるだろうか．図式 $J\colon \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ と重み $\mathcal{D} \to \mathbf{Set}$ に対して筒を考えるには，まず筒の頂点 $X \in \mathcal{C}$ を与えなければならない．さらに，各対象 $d \in \mathcal{D}$ に対して，$a_k\colon x \to d \in P(d)$ の像として筒の足 $\alpha_k\colon X \to Jd$ を選ぶ必要がある．これは写像の族 $\{\alpha^{(d)}\colon Pd \to \mathcal{C}(X, Jd)\}_d$ を定める．足 α_k は $f\colon d \to d' \in \mathcal{D}$ に対して別の足 $f\alpha_k\colon x \to Jd'$ を与えるから，この写像の族 $\alpha^{(d)}$ は $d \in \mathcal{D}$ に関して自然になり，自然変換 $\alpha\colon P \Rightarrow \mathcal{C}(X, J-)$ を定めることが分かる．逆に，この形の自然変換から筒が与えられることも容易に確かめられる．

ここまでの議論をまとめて新しい定義として書き直そう．

Definition 3.1. 図式 $J\colon \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ と重み $\Phi\colon \mathcal{D} \to \mathbf{Set}$ に対して，**Φ-型の筒**とは，$\mathcal{D}$ の対象 X と，自然変換 $\Phi\colon P \Rightarrow \mathcal{C}(X, J-)$ の組のことである． ■

そして，極限は普遍的な筒として定義されていたが，これは次のように定義し直せる．

Definition 3.2. 図式 $J\colon \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ と重み $\Phi\colon \mathcal{D} \to \mathbf{Set}$ に対して，**Φ-型の極限**とは，Φ-型の筒 $(L \in \mathcal{C},\ \lambda\colon \Phi \Rightarrow \mathcal{C}(L, J-))$ であって，任意の P-型の筒 (X, α) に対して，一意的に射 $u\colon X \to L$ が存在して，$\alpha = \mathcal{C}(u, \mathrm{id}) \circ \lambda$ を満たすもののことである．

これはすなわち，$\mathcal{D}$ の余前層圏を $[\mathcal{D}, \mathbf{Set}]$ で書いたときに，自然同型 $[\mathcal{D}, \mathbf{Set}](\Phi, \mathcal{C}(-, J)) \cong \mathcal{C}(-, L)$ を与える L のことである． ■

実際に前節で挙げた例での重みを考えてみよう．

Example 3.3. 錐型の極限は，図式圏の各頂点の像に対してちょうど 1 本ずつ足があるものだから，この重みは 1 点集合への恒等写像 $\Delta 1\colon \mathcal{D} \to \mathbf{Set}$ になる． ■

Example 3.4. 図式圏 $0 \xrightarrow{a} 1$ に対して Kernel pair の重み Φ_{KP} は，下の図のように 0 の像 C_0 へは 2 本の足

[*5] profunctor についてよく知っている読者は，筒の型の定義が，$\mathbb{1}$ から $\mathcal{D}$ への profunctor，つまり余前層の cograph/collage を与えていることに気づくかもしれない．

が，1 の像 C_1 へは 1 本の足があって欲しいので，$\Phi_{KP}0 = 2$，$\Phi_{KP}1 = 1$ とすれば良い．

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[dl, shift right, "k"'] \arrow[dl, shift left, "h"] \arrow[dr, "fk=fh"] & \\ C_0 \arrow[rr, "f"'] & & C_1 \end{tikzcd}$$

■

Example 3.5. 図式圏 $\mathbb{1}$ と集合 S に対して S-power の重みは図式で指定した頂点 C へ足が $|S|$ 本伸びて欲しいので，$\ulcorner S \urcorner\colon \mathbb{1} \to \mathbf{Set}$ とすればいい． ■

Example 3.6. 図式圏 $0 \leftarrow 2 \rightarrow 1$ に対して，span の中抜き極限の重み Φ_{sp} は，$\Phi 0 = \Phi 1 = 1$，$\Phi 2 = \emptyset$ とすればいい． ■

Example 3.7. 図式圏 $\mathcal{A}^{\mathrm{op}} \times \mathcal{A}$ に対して，エンドの重み Φ_{End} は，$\mathcal{A}(-,-)\colon \mathcal{A}^{\mathrm{op}} \times \mathcal{A} \to \mathbf{Set}$ で与えられる．詳細は演習問題としておこう． ■

4 錐型の極限

勘のいい読者ならすでに気づいているかもしれないが，実のところ，ここまで挙げた 4 つの錐型でない極限は，ある特定の形をした錐型でない極限でしかない．Kernel pair は f と f の pullback，power は同じ対象の積，span の中抜き極限も積として表せる．同様にエンドも特殊な形をした錐型の極限でかける．

Proposition 4.1. 圏 $\mathcal{A}$ に対して，次のような圏 $\mathcal{B}$ を考える．

- 対象は $\{x_A \mid A \in \mathcal{A}\} \sqcup \{x_f \mid f \in \mathcal{A}\}$
- 射は $f\colon A_0 \to A_1$ に対して，$f_*\colon x_{A_0} \to x_f$ と $f^*\colon x_{A_1} \to x_f$ がある．

$P\colon \mathcal{A}^{\mathrm{op}} \times \mathcal{A} \to \mathcal{C}$ のエンドは，B からの関手 $Q\colon \mathcal{B} \to \mathcal{C}$ で，$Qx_A = P(A, A)$，$Qx_f = P(\mathrm{dom}(f), \mathrm{cod}(f))$ で定義できるものとすると，Q の錐型の極限がエンドになる．

Proof. ウェッジに要求した可換性がこの圏 $\mathcal{B}$ に表現されていることを観察せよ． □

実際，錐型の極限があれば，任意の極限をつくることができてしまう．

Theorem 4.2. 任意の錐型の極限を持つ圏は，任意の極限を持つ．

Proof. $\mathcal{C}$ を任意の錐型の極限を持つ圏とする．図式 $J\colon \mathcal{A} \to \mathcal{C}$ と重み $\Phi\colon \mathcal{A} \to \mathbf{Set}$ に対して，$P(A, A')$ を JA' の ΦA-power $\prod_{\Phi A} JA'$ で定める．射 $f\colon A_0 \to A_1$ に対して，写像 $\Phi f\colon \Phi A_0 \to \Phi A_1$ を用いて $P(f, A') = \langle \pi_{\Phi f(a_0)} \rangle\colon \prod_{a_1 \in \Phi A_1} JA' \to \prod_{a_0 \in \Phi A_0} JA'$ とする．また，射 $g\colon A'_0 \to A'_1$ に対して，$P(A, g) = \prod Jg\colon \prod JA'_0 \to \prod JA'_1$ とする．すると，これにより P は関手 $\mathcal{A}^{\mathrm{op}} \times \mathcal{A} \to \mathcal{C}$ が得られる．

この P のエンドが，J の Φ-型の極限になることを確かめよう．そのために，P のウェッジと Φ-型の筒の関係を調べる．まず，$\alpha^{(A)}\colon X \to P(A, A)$ なる射は，power の普遍性から，射の族 $\{\alpha_a\colon X \to JA\}_{a \in \Phi A}$ と対応する．

射 $f\colon A_0 \to A_1$ についてウェッジの要求する可換性は,

$$\begin{tikzcd}
 & \prod_{\Phi A_1} JA_1 \arrow[dr, "\langle \pi_{\Phi f(a_0)} \rangle"] & \\
X \arrow[ur, "\alpha^{(A_1)}"] \arrow[dr, "\alpha^{(A_0)}"'] & & \prod_{\Phi A_0} JA_1 \\
 & \prod_{\Phi A_0} JA_0 \arrow[ur, "\prod Jf"'] &
\end{tikzcd}$$

だったが，これは普遍性から次と等価.

$$\begin{tikzcd}
 & JA_1 \\
X \arrow[ur, "\alpha_{(\Phi f)a}"] \arrow[dr, "\alpha_a"'] & \\
 & JA_0 \arrow[uu, "Jf"']
\end{tikzcd}$$

そしてこれは筒を一つ与えることに等しい. $\square$

また，より直接的な方法として，Φ の要素の圏からの関手 $\int \Phi \to \mathcal{A}$ を考え，合成 $\int \Phi \to \mathcal{A} \xrightarrow{J} \mathcal{C}$ の錐型の極限を取ることでも，J の Φ-型の極限が得られる．この証明も演習問題としておこう．

まとめると，一般の極限は特定の形をした錐型の極限と解釈することができることが示された．全ての錐型の極限があるとは限らないが，特定の形をした場合に限って錐型の極限が取れるときには，“Φ-型の極限” という言葉は便利である．また，一般の豊穣圏では，錐型の極限では表せない極限も存在するどころか，錐型の極限が定義できない場合すらあり，本稿での極限の定義の方が自然な定義になる [Kel82].

本稿で極限と読んだものは，一般には**重み付き極限 (weighted limit)** と呼ばれている．

参考文献

[Hir21] H. Hirai. “数理情報学のための束論 Lattice Theory for Mathematical Informatics.” https://www.math.nagoya-u.ac.jp/~hirai.hiroshi/papers/lattice20211108.pdf, 2021.

[Kel82] G. M. Kelly. *Basic concepts of enriched category theory*, *Lecture Notes in Mathematics*, vol. 64. Cambridge University Press, 1982.