Wide pullback

K.Hirata

December 7, 2023

概要

この pdf は 圏論 Advent Calendar 2024 の 7 日目のエントリとして書かれました．Wide pullback について書きます．

目次

1 Wide pullback とは

Wide pullback という用語の定義には 2 つの流儀[*1]があるので，それぞれ別の名前で定義する．

Definition 1.1 (Slice limit, Fibered limit)**.** 図式圏が small で terminal object を持つような limit のことを **slice limit** と呼び，図式圏が terminal object 以外への非自明な射を持たないような slice limit を **fibered limit** と呼ぶ．[*2] ■

図式が $\mathcal{I} \xrightarrow{J} \mathcal{C}$ であるとき，$\mathcal{I}$ の terminal を i とすると，この関手は $\mathcal{I} \xrightarrow{J'} \mathcal{C}/Ji \to \mathcal{C}$ と factorize される．関手 J が slice limit を持つとは，関手 J' が slice 圏 $\mathcal{C}/Ji$ で limit を持つことである．Fibered limit は濃度が small な pullback のことである．

Example 1.2. 一般に equalizer は slice limit ではないが，次のような cofork があるとき，この limit は slice limit であり，それは f と g の equalizer になる．これは fibered limit ではない．

$$X \underset{g}{\overset{f}{\rightrightarrows}} Y \xrightarrow{h} Z$$

[*1] [Tay89] では本稿で slice limit と呼ぶものを，[nLa24b] では本稿では fibered limit と呼ぶものを wide pullback と呼んでいる．個人的には後者を wide pullback と呼ぶのが自然に思える．

[*2] slice limit の terminology は本稿で勝手に作ったもので，fibered limit は [Par90] における terminology である．

■

Theorem 1.3. 圏 $\mathcal{C}$ に関して，以下は同値である．

(i) 任意の *slice* が *complete* である．
(ii) 任意の *slice limit* を持つ．
(iii) 任意の *fibered limit* を持つ．
(iv) 任意の *(binary) pullback* と *cofiltered limit* を持つ．

Proof. (i) $\Leftrightarrow$ (ii) は明らか．(ii) $\Rightarrow$ (iv) は，任意の cofiltered category $\mathcal{I}$ とその任意の object i に対して $\mathcal{I}/i \to \mathcal{I}$ は initial functor かつ $\mathcal{I}/i$ は terminal を持つことから従う．(iv) $\Rightarrow$ (iii) を示す．Discrete category I に terminal object $\bot$ を足した圏 $I_\bot$ $\{i \to \bot\}_{i\in I}$ に対して，圏 $\bar{I}$ を I の有限集合の poset の反対圏 $\bar{I} := \mathcal{P}^{\mathrm{fin}}(I)^{\mathrm{op}}$ で定義すると，$\iota\colon I_\bot \to \bar{I}; i \mapsto \{i\}, x \mapsto \emptyset$ によって $I_\bot$ は $\bar{I}$ の full subcategory になる．圏 $\mathcal{C}$ への関手 $J\colon \mathcal{I}_\bot \to \mathcal{C}$ を，集合 S に対して finite pullback $\{Ji \to J\bot\}_{i\in S}$ を割り当てることで，$\bar{I}$ からの関手 $\bar{J}\colon \bar{I} \to \mathcal{C}$ へと拡張することができて $J = \bar{J}\iota$ のように factorize できる．圏 $\mathcal{C}$ が cofiltered limit を持つことから $\bar{J}$ は limit を持ち，これは J の limit にもなる．(iii) $\Rightarrow$ (i) は，任意の slice が small pullback (fibered limit) と terminal object を持つことから従う．(pullback と terminal があれば product や equalizer が作れる) □

上の命題から，圏全体の任意の図式を考えるときは wide pullback という用語を使って流儀によらず同じものを定義できる．

Definition 1.4. 圏 $\mathcal{C}$ が **wide pullback を持つ**ことを，Theorem 1.3 の同値な条件を満たすこととして定義する． ■

2 General Adjoint Functor Theorem (wide pullback version)

任意の関手 $S\colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ は，object $A \in \mathcal{A}$ に対して slice 上の関手 $S_A\colon \mathcal{A}/A \to \mathcal{B}/FA$ を定義する．ここでは，この任意の slice 上の関手が左随伴を持つための十分条件を general adjoint functor theorem の亜種として示す．[*3]

準備のためにいくつか定義をする．

Definition 2.1 (candidate)**.** 関手 $S\colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ に対して射 $u\colon B \to SA$ が **candidate** であるとは，任意の図式

$$\begin{array}{ccc} B & \xrightarrow{u} & SA \\ {\scriptstyle v}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle Sf} \\ SA' & \xrightarrow{Sg} & SA'' \end{array}$$

[*3] 参考文献は [Tay89] の Section 1

に対して，ある $h\colon A \to A'$ があって，$v = Sh \circ u$ かつ $gh = f$ となることである．

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "u"] \arrow[d, "v"'] & SA \arrow[d, "Sf"] \arrow[dl, dotted, "Sh"'] \\ SA' \arrow[r, "Sg"'] & SA'' \end{tikzcd}$$

■

Definition 2.2 (stable)**.** 関手 $S\colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ が **stable** であるとは，任意の射 $B \to SA$ が $B \xrightarrow{u} SA_0 \xrightarrow{Sf} SA$ であって u が candidate になるように分解できることである． ■

Definition 2.3 (solution set condition)**.** 関手 $S\colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ が **solution set condition** を満たすとは，任意の $w\colon B \to SA$ に対して，ある w の分解の集合 $\{B \xrightarrow{u_i} SA_i \xrightarrow{Sf_i} SA\}_i$ があって，任意に w の分解 $B \xrightarrow{u'} SA' \xrightarrow{Sf'} SA$ が与えられたとき，ある i と $h\colon A_i \to A'$ が存在して，$u' = Sh \circ u_i$ かつ $f'h = f_i$ となることである． ■

Theorem 2.4. 圏 $\mathcal{A}$ が *wide pullback* を持つとする．このとき，関手 $S\colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ に関して以下は同値である．

(i) S は *stable.*
(ii) 任意の $A \in \mathcal{A}$ に対して $S_A\colon \mathcal{A}/A \to \mathcal{B}/SA$ が左随伴を持つ．
(iii) S は *wide pullback* を保ち，*solution set condition* を満たす．

Proof. (i) $\Rightarrow$ (ii) は，各 $A \in \mathcal{A}$ と $(f\colon B \to SA) \in \mathcal{B}/SA$ に対して S の stability から η_f^A が candidate になるような分解 $B \xrightarrow{\eta_f^A} SA' \xrightarrow{ST_A(f)} SA$ があって，T_A が左随伴を定める．

(ii) $\Rightarrow$ (iii) を示す．$\mathcal{A}/A \to \mathcal{B}/SA$ が continuous であることから slice limit を保つ．また，S_A は左随伴 T_A を持つことから w に対して $B \xrightarrow{\eta_w} SA' \xrightarrow{T(w)} SA$ と分解できて，この 1 元集合が solution set になる．

(iii) $\Rightarrow$ (i) を示す．任意に $w\colon B \to SA$ に対して，その solution set $\{B \xrightarrow{u_i} SA_i \xrightarrow{Sf_i} SA\}_i$ をとる．まず $\{f_i\colon A_i \to A\}$ の filtered pullback $P \xrightarrow{\pi_i} A_i$ をとり，さらに P の endo morphism の部分集合

$$\left\{ e\colon P \to P \;\middle|\; \begin{tikzcd} & SP \arrow[dd, "Se"] \\ B \arrow[ur] \arrow[dr] & \\ & SP \end{tikzcd} \quad \begin{tikzcd} P \arrow[dd, "e"'] \arrow[dr, "f_i\pi_i"] & \\ & A \\ P \arrow[ur, "f_i\pi_i"'] & \end{tikzcd} \right\}$$

の equalizer をとって，$i\colon L \to P$ とする．この equalizer は射が $f_i\pi_i$ で coequalize されているので slice limit になるため存在する．

$$L \rightarrowtail^{i} P \xrightarrow{\pi_i} A_i \xrightarrow{f_i} A$$

また，S は wide pullback を保存し，$B \to SP$ は Se たちを equalize するので，$u\colon B \to SL$ がとれる．

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "u"] & SL \arrow[r, tail, "Si"] \arrow[rrr, bend right, "Sf"'] & SP \arrow[r, "S\pi_i"] & SA_i \arrow[r, "Sf_i"] & SA \end{tikzcd}$$

u が candidate になることを示せば良い．ここで準備として，まず次のような図式を満たす f' が与えられたとき，f' が split epi になることを示しておく．

$$\begin{tikzcd}
& SL \arrow[dd, "Sf'"] & L \arrow[dd, "f'"'] \arrow[dr, "f"] & \\
B \arrow[ur, "u"] \arrow[dr, "u"'] & & & A \\
& SL & L \arrow[ur, "f"'] &
\end{tikzcd}$$

また solution set condition から，ある $A_j \to L$ が取れて，それに射影を precompose すると $P \to L$ なる射が取れる．よって下図の下の射のように合成することで P の endo morphism が取れるが，これは e で id と equalize される．

$$\begin{tikzcd}
L \arrow[d, tail, "e"'] \arrow[rrrd, tail, bend left, "e"] & & & \\
P \arrow[r] & L \arrow[r, "f'"'] & L \arrow[r, tail, "e"'] & P
\end{tikzcd}$$

ここで e は monomorphism なので

$$\begin{tikzcd}
L \arrow[d, tail, "e"'] \arrow[rrd, bend left, "\mathrm{id}"] \arrow[rrrd, tail, bend left, "e"] & & & \\
P \arrow[r] & L \arrow[r, "f'"'] & L \arrow[r, tail, "e"'] & P
\end{tikzcd}$$

となるから f' は split epi である．

まず一意性を示そう．次のような k, h があるとする．$k = h$ を示す．

$$\begin{tikzcd}
B \arrow[r, "u"] \arrow[dr, "v"'] & SL \arrow[d, shift right, "Sk"'] \arrow[d, shift left, "Sh"] \arrow[dr] & \\
& SA'' \arrow[r] & SA'
\end{tikzcd}$$

これら k と h の equalizer をとって，E とする．u は Sk と Sh を equalize するので，B から SE への射 z が取れる．

$$\begin{tikzcd}
& SE \arrow[d, tail, "Se"] & \\
B \arrow[ur, dotted, bend left, "z"] \arrow[r, "u"] \arrow[dr, "v"'] & SL \arrow[r, "Sf"] \arrow[d, shift right, "Sk"'] \arrow[d, shift left, "Sh"] \arrow[dr] & SA \\
& SA'' \arrow[r] & SA'
\end{tikzcd}$$

いま $B \xrightarrow{z} SE \xrightarrow{S(fe)} SA$ は w の分解になっているので，u は z を factorize する．

$$
\begin{tikzcd}
 & SL \arrow[d, "S\ell"] & \\
 & SE \arrow[d, tail, "Se"] & \\
B \arrow[uur, bend left, "u"] \arrow[ur, bend left, "z"] \arrow[r, "u"] \arrow[dr, "v"'] & SL \arrow[r, "Sf"] \arrow[d, shift right, "Sk"'] \arrow[d, shift left, "Sh"] \arrow[dr] & SA \\
 & SA'' \arrow[r] & SA'
\end{tikzcd}
$$

先ほど示したことから，$e\ell$ は split epi であるから，e は split epi かつ regular mono である．よって e は iso なので，$k = h$.

　最後に下の図式が与えられたときに，これを対角に埋める $h\colon A \to A'$ の存在を示そう．

$$
\begin{tikzcd}
B \arrow[r, "u"] \arrow[d, "v"'] & SL \arrow[d, "Sg"] \\
SA' \arrow[r, "Sg'"] & SA''
\end{tikzcd}
$$

この図式の pullback をとる．

$$
\begin{tikzcd}
B \arrow[rr, "u"] \arrow[dr, "z"] \arrow[dd, "v"'] & & SL \arrow[r, "Sf"] \arrow[dd, "Sg"] & SA \\
 & S(A \times_{A''} A') \arrow[ur, "Sp"] \arrow[dl, "Sp'"'] & & \\
SA' \arrow[rr, "Sg'"] & & SA'' &
\end{tikzcd}
$$

この $B \xrightarrow{z} S(A \times_{A''} A') \xrightarrow{S(fp)} SA$ は w の分解を与えているので，u は z を factorize する．

$$
\begin{tikzcd}
B \arrow[drr, bend left, "u"] \arrow[dr, "u"] \arrow[ddd, "v"'] & & & \\
 & SL \arrow[d, "Sq"] & SL \arrow[r, "Sf"] \arrow[dd, "Sg"] & SA \\
 & S(A \times_{A''} A') \arrow[ur, "Sp"] \arrow[dl, "Sp'"'] & & \\
SA' \arrow[rr, "Sg'"] & & SA'' &
\end{tikzcd}
$$

いま，一意性から L の endo morphism pq は id である．

$$
\begin{tikzcd}
B \arrow[dr, "u"] \arrow[drr, bend left, "u"] \arrow[ddd, "v"'] & & & \\
& SL \arrow[r, "\mathrm{id}"] \arrow[d, "Sq"] & SL \arrow[r, "Sf"] \arrow[dd, "Sg"] & SA \\
& S(A \times_{A''} A') \arrow[ur, "Sp"] \arrow[dl, "Sp'"'] & & \\
SA' \arrow[rr, "Sg'"] & & SA'' &
\end{tikzcd}
$$

よって，$p'q$ が対角に埋める射として存在する． □

3　余談

Paré [Par90] によると，次が成り立つ．

Theorem 3.1. $\mathcal{I}$ を圏とする．*Wide pullback* を持つ任意の圏が I からの関手の *limit* を保つつことと，$\mathcal{I}$ が *connected* かつ *simply connected* であることは同値である．ただし *simply connected* とは，*groupoid* の圏 **Gpd** から **Cat** への *inclusion* の左随伴を $\pi_1\colon \mathbf{Cat} \to \mathbf{Gpd}$ としたとき[*4]，$\pi_1(\mathcal{I})$ が *terminal category* $\mathbb{1}$ と圏同値であることをいう．

nLab によると，こういうのもあるらしい．

Theorem 3.2 ([nLa24a])**.** 圏 $\mathcal{C}$ が *complete* なとき，関手 $F\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ が *wide pullback* を持つことと *connected limit* を保つことは同値である．[*5]

参考文献

[nLa24a] nLab authors. “connected limit.” `https://ncatlab.org/nlab/show/connected+limit`, 2024. Revision 14.

[nLa24b] nLab authors. “wide pullback.” `https://ncatlab.org/nlab/show/wide+pullback`, 2024. Revision 34.

[Par90] R. Paré. “Simply Connected Limits.” *Canadian Journal of Mathematics*, 1990. vol. 42(4):pp. 731–746. doi: 10.4153/CJM-1990-038-6.

[Tay89] P. Taylor. “Quantitative Domains, Groupoids and Linear Logic.” In: D. H. Pitt, D. E. Rydeheard, P. Dybjer, A. M. Pitts, and A. Poigné, eds., *Category Theory and Computer Science, Manchester, UK, September 5-8, 1989, Proceedings*. Springer, *Lecture Notes in Computer Science*, vol. 389, pp. 155–181. doi: 10.1007/BFB0018351.

[*4] 形式的に逆射を足して groupoid にする関手

[*5] 圏 $\mathcal{D}$ は locally small が必要らしいが，本稿では圏は locally small を仮定しているので触れていない．