

# Wide pullback

K.Hirata

December 7, 2023

## 概要

この pdf は [圏論 Advent Calendar 2024](#) の 7 日目のエントリとして書かれました。Wide pullback について書きます。

## 目次

1	<a href="#">Wide pullback とは</a>	1
2	<a href="#">General Adjoint Functor Theorem (wide pullback version)</a>	2
3	<a href="#">余談</a>	6

## 1 Wide pullback とは

Wide pullback という用語の定義には 2 つの流儀<sup>\*1</sup>があるので、それぞれ別の名前で定義する。

**Definition 1.1** (Slice limit, Fibered limit). 関数圏が small で terminal object を持つような limit のことを **slice limit** と呼び、関数圏が terminal object 以外への非自明な射を持たないような slice limit を **fibered limit** と呼ぶ.<sup>\*2</sup> ■

関数  $I \xrightarrow{J} C$  であるとき、 $I$  の terminal を  $i$  とすると、この関手は  $I \xrightarrow{J'} C/Ji \rightarrow C$  と factorize される。関手  $J$  が slice limit を持つとは、関手  $J'$  が slice 圏  $C/Ji$  で limit を持つことである。Fibered limit は濃度が small な pullback のことである。

**Example 1.2.** 一般に equalizer は slice limit ではないが、次のような cofork があるとき、この limit は slice limit であり、それは  $f$  と  $g$  の equalizer になる。これは fibered limit ではない。

$$X \begin{array}{c} \xrightarrow{f} \\ \xrightarrow{g} \end{array} Y \xrightarrow{h} Z$$

---

<sup>\*1</sup> [Tay89] では本稿で slice limit と呼ぶものを、[nLa24b] では本稿では fibered limit と呼ぶものを wide pullback と呼んでいる。個人的には後者を wide pullback と呼ぶのが自然に思える。

<sup>\*2</sup> slice limit の terminology は本稿で勝手に作ったもので、fibered limit は [Par90] における terminology である。

■

**Theorem 1.3.** 圏  $\mathcal{C}$  に関して、以下は同値である。

- (i) 任意の slice が complete である。
- (ii) 任意の slice limit を持つ。
- (iii) 任意の fibered limit を持つ。
- (iv) 任意の (binary) pullback と cofiltered limit を持つ。

*Proof.* (i)  $\Leftrightarrow$  (ii) は明らか。 (ii)  $\Rightarrow$  (iv) は、任意の cofiltered category  $\mathcal{I}$  とその任意の object  $i$  に対して  $\mathcal{I}/i \rightarrow \mathcal{I}$  は initial functor かつ  $\mathcal{I}/i$  は terminal を持つことから従う。 (iv)  $\Rightarrow$  (iii) を示す。 Discrete category  $I$  に terminal object  $\perp$  を足した圏  $I_{\perp} = \{i \rightarrow \perp\}_{i \in I}$  に対して、圏  $\bar{I}$  を  $I$  の有限集合の poset の反対圏  $\bar{I} := \mathcal{P}^{\text{fin}}(I)^{\text{op}}$  で定義すると、 $\iota: I_{\perp} \rightarrow \bar{I}; i \mapsto \{i\}, x \mapsto \emptyset$  によって  $I_{\perp}$  は  $\bar{I}$  の full subcategory になる。圏  $\mathcal{C}$  への関手  $J: I_{\perp} \rightarrow \mathcal{C}$  を、集合  $S$  に対して finite pullback  $\{Ji \rightarrow J\perp\}_{i \in S}$  を割り当てることで、 $\bar{I}$  からの関手  $\bar{J}: \bar{I} \rightarrow \mathcal{C}$  へと拡張することができて  $J = \bar{J}\iota$  のように factorize できる。圏  $\mathcal{C}$  が cofiltered limit を持つことから  $\bar{J}$  は limit を持ち、これは  $J$  の limit にもなる。 (iii)  $\Rightarrow$  (i) は、任意の slice が small pullback (fibered limit) と terminal object を持つことから従う。(pullback と terminal があれば product や equalizer が作れる) □

上の命題から、圏全体の任意の図式を考えるときは wide pullback という用語を使って流儀によらず同じものを定義できる。

**Definition 1.4.** 圏  $\mathcal{C}$  が wide pullback を持つことを、Theorem 1.3 の同値な条件を満たすこととして定義する。 ■

## 2 General Adjoint Functor Theorem (wide pullback version)

任意の関手  $S: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$  は、object  $A \in \mathcal{A}$  に対して slice 上の関手  $S_A: \mathcal{A}/A \rightarrow \mathcal{B}/FA$  を定義する。ここでは、この任意の slice 上の関手が左随伴を持つための十分条件を general adjoint functor theorem の亜種として示す。<sup>\*3</sup>

準備のためにいくつか定義をする。

**Definition 2.1 (candidate).** 関手  $S: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$  に対して射  $u: B \rightarrow SA$  が candidate であるとは、任意の図式

$$\begin{array}{ccc} B & \xrightarrow{u} & SA \\ v \downarrow & & \downarrow Sf \\ SA' & \xrightarrow{Sg} & SA'' \end{array}$$

---

<sup>\*3</sup> 参考文献は [Tay89] の Section 1

に対して, ある  $h: A \rightarrow A'$  があって,  $v = Sh \circ u$  かつ  $gh = f$  となることである.

$$\begin{array}{ccc} B & \xrightarrow{u} & SA \\ v \downarrow & \swarrow Sh & \downarrow Sf \\ SA' & \xrightarrow{Sg} & SA'' \end{array}$$

■

**Definition 2.2** (stable). 関手  $S: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$  が **stable** であるとは, 任意の射  $B \rightarrow SA$  が  $B \xrightarrow{u} SA_0 \xrightarrow{Sf} SA$  であって  $u$  が candidate になるように分解できることである. ■

**Definition 2.3** (solution set condition). 関手  $S: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$  が **solution set condition** を満たすとは, 任意の  $w: B \rightarrow SA$  に対して, ある  $w$  の分解の集合  $\{B \xrightarrow{u_i} SA_i \xrightarrow{Sf_i} SA\}_i$  があって, 任意に  $w$  の分解  $B \xrightarrow{u'} SA' \xrightarrow{Sf'} SA$  が与えられたとき, ある  $i$  と  $h: A_i \rightarrow A'$  が存在して,  $u' = Sh \circ u_i$  かつ  $f'h = f_i$  となることである. ■

**Theorem 2.4.** 圏  $\mathcal{A}$  が *wide pullback* を持つとする. このとき, 関手  $S: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$  に関して以下は同値である.

- (i)  $S$  は *stable*.
- (ii) 任意の  $A \in \mathcal{A}$  に対して  $S_A: \mathcal{A}/A \rightarrow \mathcal{B}/SA$  が左随伴を持つ.
- (iii)  $S$  は *wide pullback* を保ち, *solution set condition* を満たす.

*Proof.* (i)  $\Rightarrow$  (ii) は, 各  $A \in \mathcal{A}$  と  $(f: B \rightarrow SA) \in \mathcal{B}/SA$  に対して  $S$  の stability から  $\eta_f^A$  が candidate になるような分解  $B \xrightarrow{\eta_f^A} SA' \xrightarrow{S_{T_A}(f)} SA$  があって,  $T_A$  が左随伴を定める.

(ii)  $\Rightarrow$  (iii) を示す.  $\mathcal{A}/A \rightarrow \mathcal{B}/SA$  が continuous であることから slice limit を保つ. また,  $S_A$  は左随伴  $T_A$  を持つことから  $w$  に対して  $B \xrightarrow{\eta_w} SA' \xrightarrow{T(w)} SA$  と分解できて, この 1 元集合が solution set になる.

(iii)  $\Rightarrow$  (i) を示す. 任意に  $w: B \rightarrow SA$  に対して, その solution set  $\{B \xrightarrow{u_i} SA_i \xrightarrow{Sf_i} SA\}_i$  をとる. まず  $\{f_i: A_i \rightarrow A\}$  の filtered pullback  $P \xrightarrow{\pi_i} A_i$  をとり, さらに  $P$  の endo morphism の部分集合

$$\left\{ \begin{array}{c} e: P \rightarrow P \\ \begin{array}{ccc} & & SP \\ & \nearrow & \downarrow Se \\ B & & SP \\ & \searrow & \\ & & A \end{array} \\ \begin{array}{ccc} P & & A \\ \downarrow e & \searrow f_i \pi_i & \\ P & \nearrow f_i \pi_i & \end{array} \end{array} \right\}$$

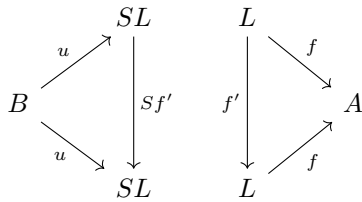
の equalizer をとって,  $i: L \rightarrow P$  とする. この equalizer は射が  $f_i \pi_i$  で coequalize されているので slice limit になるため存在する.

$$L \xrightarrow{i} P \xrightarrow{\pi_i} A_i \xrightarrow{f_i} A$$

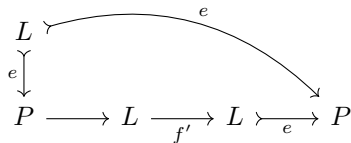
また,  $S$  は wide pullback を保存し,  $B \rightarrow SP$  は  $Se$  たちを equalize するので,  $u: B \rightarrow SL$  がとれる.

$$\begin{array}{ccccccc} B & \xrightarrow{u} & SL & \xrightarrow{Si} & SP & \xrightarrow{S\pi_i} & SA_i \xrightarrow{Sf_i} SA \\ & & & \searrow & \downarrow Sf & \nearrow & \\ & & & & & & \end{array}$$

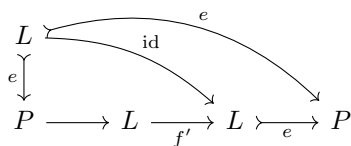
$u$  が candidate になることを示せば良い. ここで準備として, まず次のような図式を満たす  $f'$  が与えられたとき,  $f'$  が split epi になることを示しておく.



また solution set condition から, ある  $A_j \rightarrow L$  が取れて, それに射影を precompose すると  $P \rightarrow L$  なる射が取れる. よって下図の下の射のように合成することで  $P$  の endo morphism が取れるが, これは  $e$  で id と equalize される.

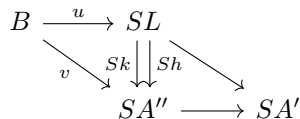


ここで  $e$  は monomorphism なので

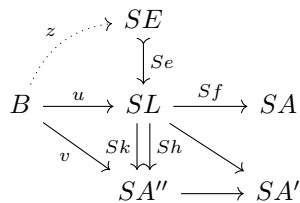


となるから  $f'$  は split epi である.

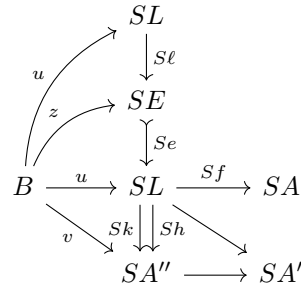
まず一意性を示そう. 次のような  $k, h$  があるとする.  $k = h$  を示す.



これら  $k$  と  $h$  の equalizer をとって,  $E$  とする.  $u$  は  $S_k$  と  $S_h$  を equalize するので,  $B$  から  $SE$  への射  $z$  が取れる.

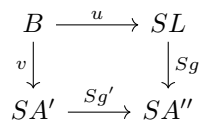


いま  $B \xrightarrow{z} SE \xrightarrow{S(fe)} SA$  は  $w$  の分解になっているので,  $u$  は  $z$  を factorize する.

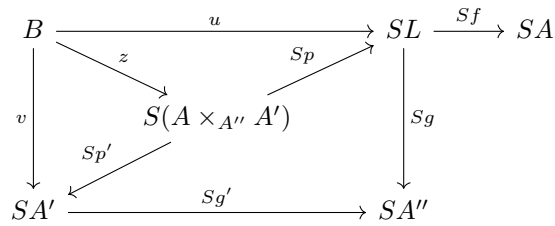


先ほど示したことから,  $e\ell$  は split epi であるから,  $e$  は split epi かつ regular mono である. よって  $e$  は iso なので,  $k = h$ .

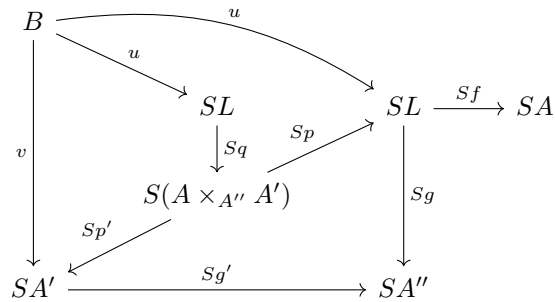
最後に下の図式が与えられたときに, これを対角に埋める  $h: A \rightarrow A'$  の存在を示そう.



この図式の pullback をとる.



この  $B \xrightarrow{z} S(A \times_{A''} A') \xrightarrow{S(fp)} SA$  は  $w$  の分解を与えているので,  $u$  は  $z$  を factorize する.



いま、一意性から  $L$  の endo morphism  $pq$  は  $\text{id}$  である。

$$\begin{array}{ccccc}
 B & & & & \\
 \downarrow v & \searrow u & & \xrightarrow{u} & \\
 & SL & \xrightarrow{\text{id}} & SL & \xrightarrow{Sf} SA \\
 & \downarrow Sq & \nearrow Sp & \downarrow Sg & \\
 & S(A \times_{A''} A') & & & \\
 & \swarrow Sp' & & \downarrow Sg' & \\
 SA' & \xrightarrow{Sg'} & SA'' & & 
 \end{array}$$

よって、 $p'q$  が対角に埋める射として存在する。 □

### 3 余談

Paré [Par90] によると、次が成り立つ。

**Theorem 3.1.**  $\mathcal{I}$  を圏とする。Wide pullback を持つ任意の圏が  $I$  からの関手の  $\text{limit}$  を保つことと、 $\mathcal{I}$  が  $\text{connected}$  かつ  $\text{simply connected}$  であることは同値である。ただし  $\text{simply connected}$  とは、groupoid の圏  $\mathbf{Gpd}$  から  $\mathbf{Cat}$  への inclusion の左随伴を  $\pi_1: \mathbf{Cat} \rightarrow \mathbf{Gpd}$  としたとき\*4、 $\pi_1(\mathcal{I})$  が terminal category  $\mathbb{1}$  と圏同値であることをいう。

nLab によると、こういうのもあるらしい。

**Theorem 3.2** ([nLa24a]). 圏  $\mathcal{C}$  が complete なとき、関手  $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  が wide pullback を持つことと  $\text{connected limit}$  を保つことは同値である。\*5

### 参考文献

[nLa24a] nLab authors. “connected limit.” <https://ncatlab.org/nlab/show/connected+limit>, 2024. Revision 14.

[nLa24b] nLab authors. “wide pullback.” <https://ncatlab.org/nlab/show/wide+pullback>, 2024. Revision 34.

[Par90] R. Paré. “Simply Connected Limits.” *Canadian Journal of Mathematics*, 1990. vol. 42(4):pp. 731–746. doi: 10.4153/CJM-1990-038-6.

[Tay89] P. Taylor. “Quantitative Domains, Groupoids and Linear Logic.” In: D. H. Pitt, D. E. Rydeheard, P. Dybjer, A. M. Pitts, and A. Poigné, eds., *Category Theory and Computer Science, Manchester, UK, September 5-8, 1989, Proceedings*. Springer, *Lecture Notes in Computer Science*, vol. 389, pp. 155–181. doi: 10.1007/BFB0018351.

\*4 形式的に逆射を足して groupoid にする関手

\*5 圏  $\mathcal{D}$  は locally small が必要らしいが、本稿では圏は locally small を仮定しているので触れていない。