

Wide pullback

K.Hirata

December 7, 2023

概要

この pdf は [圏論 Advent Calendar 2024](#) の 7 日目のエントリとして書かれました。Wide pullback について書きます。

目次

1	Wide pullback とは	1
2	General Adjoint Functor Theorem (wide pullback version)	2
3	余談	6

1 Wide pullback とは

Wide pullback という用語の定義には 2 つの流儀^{*1}があるので、それぞれ別の名前で定義する。

Definition 1.1 (Slice limit, Fibered limit). 関数圏が small で terminal object を持つような limit のことを **slice limit** と呼び、関数圏が terminal object 以外への非自明な射を持たないような slice limit を **fibered limit** と呼ぶ.^{*2} ■

関数 $I \xrightarrow{J} C$ であるとき、 I の terminal を i とすると、この関手は $I \xrightarrow{J'} C/Ji \rightarrow C$ と factorize される。関手 J が slice limit を持つとは、関手 J' が slice 圏 C/Ji で limit を持つことである。Fibered limit は濃度が small な pullback のことである。

Example 1.2. 一般に equalizer は slice limit ではないが、次のような cofork があるとき、この limit は slice limit であり、それは f と g の equalizer になる。これは fibered limit ではない。

$$X \begin{array}{c} \xrightarrow{f} \\ \xrightarrow{g} \end{array} Y \xrightarrow{h} Z$$

^{*1} [Tay89] では本稿で slice limit と呼ぶものを、[nLa24b] では本稿では fibered limit と呼ぶものを wide pullback と呼んでいる。個人的には後者を wide pullback と呼ぶのが自然に思える。

^{*2} slice limit の terminology は本稿で勝手に作ったもので、fibered limit は [Par90] における terminology である。

■

Theorem 1.3. 圏 \mathcal{C} に関して、以下は同値である。

- (i) 任意の slice が complete である.
- (ii) 任意の slice limit を持つ.
- (iii) 任意の fibered limit を持つ.
- (iv) 任意の (binary) pullback と cofiltered limit を持つ.

Proof. (i) \Leftrightarrow (ii) は明らか. (ii) \Rightarrow (iv) は、任意の cofiltered category \mathcal{I} とその任意の object i に対して $\mathcal{I}/i \rightarrow \mathcal{I}$ は initial functor かつ \mathcal{I}/i は terminal を持つことから従う. (iv) \Rightarrow (iii) を示す. Discrete category I に terminal object \perp を足した圏 $I_{\perp} = \{i \rightarrow \perp\}_{i \in I}$ に対して、圏 \bar{I} を I の有限集合の poset の反対圏 $\bar{I} := \mathcal{P}^{\text{fin}}(I)^{\text{op}}$ で定義すると、 $\iota: I_{\perp} \rightarrow \bar{I}; i \mapsto \{i\}, x \mapsto \emptyset$ によって I_{\perp} は \bar{I} の full subcategory になる. 圏 \mathcal{C} への関手 $J: I_{\perp} \rightarrow \mathcal{C}$ を、集合 S に対して finite pullback $\{Ji \rightarrow J\perp\}_{i \in S}$ を割り当てることで、 \bar{I} からの関手 $\bar{J}: \bar{I} \rightarrow \mathcal{C}$ へと拡張することができて $J = \bar{J}\iota$ のように factorize できる. 圏 \mathcal{C} が cofiltered limit を持つことから \bar{J} は limit を持ち、これは J の limit にもなる. (iii) \Rightarrow (i) は、任意の slice が small pullback (fibered limit) と terminal object を持つことから従う. (pullback と terminal があれば product や equalizer が作れる) \square

上の命題から、圏全体の任意の図式を考えるときは wide pullback という用語を使って流儀によらず同じものを定義できる.

Definition 1.4. 圏 \mathcal{C} が wide pullback を持つことを、Theorem 1.3 の同値な条件を満たすこととして定義する. ■

2 General Adjoint Functor Theorem (wide pullback version)

任意の関手 $S: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ は、object $A \in \mathcal{A}$ に対して slice 上の関手 $S_A: \mathcal{A}/A \rightarrow \mathcal{B}/FA$ を定義する. ここでは、この任意の slice 上の関手が左随伴を持つための十分条件を general adjoint functor theorem の亜種として示す.*3

準備のためにいくつか定義をする.

Definition 2.1 (candidate). 関手 $S: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ に対して射 $u: B \rightarrow SA$ が candidate であるとは、任意の図式

$$\begin{array}{ccc} B & \xrightarrow{u} & SA \\ v \downarrow & & \downarrow Sf \\ SA' & \xrightarrow{Sg} & SA'' \end{array}$$

*3 参考文献は [Tay89] の Section 1

に対して, ある $h: A \rightarrow A'$ があって, $v = Sh \circ u$ かつ $gh = f$ となることである.

$$\begin{array}{ccc} B & \xrightarrow{u} & SA \\ v \downarrow & \swarrow Sh & \downarrow Sf \\ SA' & \xrightarrow{Sg} & SA'' \end{array}$$

■

Definition 2.2 (stable). 関手 $S: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ が **stable** であるとは, 任意の射 $B \rightarrow SA$ が $B \xrightarrow{u} SA_0 \xrightarrow{Sf} SA$ であって u が candidate になるように分解できることである. ■

Definition 2.3 (solution set condition). 関手 $S: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ が **solution set condition** を満たすとは, 任意の $w: B \rightarrow SA$ に対して, ある w の分解の集合 $\{B \xrightarrow{u_i} SA_i \xrightarrow{Sf_i} SA\}_i$ があって, 任意に w の分解 $B \xrightarrow{u'} SA' \xrightarrow{Sf'} SA$ が与えられたとき, ある i と $h: A_i \rightarrow A'$ が存在して, $u' = Sh \circ u_i$ かつ $f'h = f_i$ となることである. ■

Theorem 2.4. 圏 \mathcal{A} が *wide pullback* を持つとする. このとき, 関手 $S: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ に関して以下は同値である.

- (i) S は *stable*.
- (ii) 任意の $A \in \mathcal{A}$ に対して $S_A: \mathcal{A}/A \rightarrow \mathcal{B}/SA$ が左随伴を持つ.
- (iii) S は *wide pullback* を保ち, *solution set condition* を満たす.

Proof. (i) \Rightarrow (ii) は, 各 $A \in \mathcal{A}$ と $(f: B \rightarrow SA) \in \mathcal{B}/SA$ に対して S の stability から η_f^A が candidate になるような分解 $B \xrightarrow{\eta_f^A} SA' \xrightarrow{ST_A(f)} SA$ があって, T_A が左随伴を定める.

(ii) \Rightarrow (iii) を示す. $\mathcal{A}/A \rightarrow \mathcal{B}/SA$ が continuous であることから slice limit を保つ. また, S_A は左随伴 T_A を持つことから w に対して $B \xrightarrow{\eta_w} SA' \xrightarrow{T(w)} SA$ と分解できて, この 1 元集合が solution set になる.

(iii) \Rightarrow (i) を示す. 任意に $w: B \rightarrow SA$ に対して, その solution set $\{B \xrightarrow{u_i} SA_i \xrightarrow{Sf_i} SA\}_i$ をとる. まず $\{f_i: A_i \rightarrow A\}$ の filtered pullback $P \xrightarrow{\pi_i} A_i$ をとり, さらに P の endo morphism の部分集合

$$\left\{ \begin{array}{c} e: P \rightarrow P \\ \begin{array}{ccc} & & SP \\ & \nearrow & \downarrow Se \\ B & & SP \\ & \searrow & \\ & & SP \end{array} \\ \begin{array}{ccc} P & & A \\ \downarrow e & \searrow f_i \pi_i & \\ P & \nearrow f_i \pi_i & \end{array} \end{array} \right\}$$

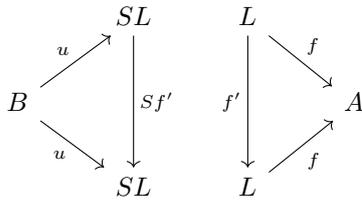
の equalizer をとって, $i: L \rightarrow P$ とする. この equalizer は射が $f_i \pi_i$ で coequalize されているので slice limit になるため存在する.

$$L \xrightarrow{i} P \xrightarrow{\pi_i} A_i \xrightarrow{f_i} A$$

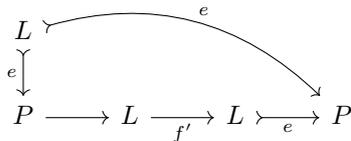
また, S は wide pullback を保存し, $B \rightarrow SP$ は Se たちを equalize するので, $u: B \rightarrow SL$ がとれる.

$$\begin{array}{ccccccc} B & \xrightarrow{u} & SL & \xrightarrow{Si} & SP & \xrightarrow{S\pi_i} & SA_i \xrightarrow{Sf_i} SA \\ & & & \searrow & \searrow & \searrow & \searrow \\ & & & & & & Sf \end{array}$$

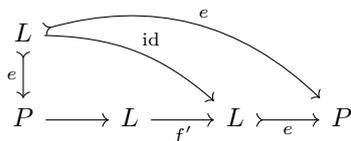
u が candidate になることを示せば良い. ここで準備として, まず次のような図式を満たす f' が与えられたとき, f' が split epi になることを示しておく.



また solution set condition から, ある $A_j \rightarrow L$ が取れて, それに射影を precompose すると $P \rightarrow L$ なる射が取れる. よって下図の下の射のように合成することで P の endo morphism が取れるが, これは e で id と equalize される.

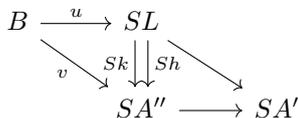


ここで e は monomorphism なので

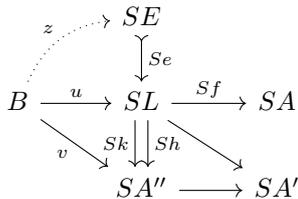


となるから f' は split epi である.

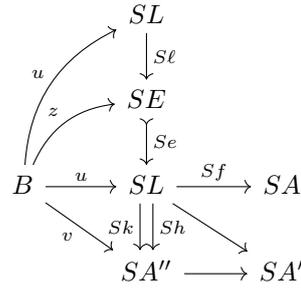
まず一意性を示そう. 次のような k, h があるとする. $k = h$ を示す.



これら k と h の equalizer をとって, E とする. u は Sk と Sh を equalize するので, B から SE への射 z が取れる.

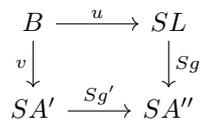


いま $B \xrightarrow{z} SE \xrightarrow{S(fe)} SA$ は w の分解になっているので, u は z を factorize する.

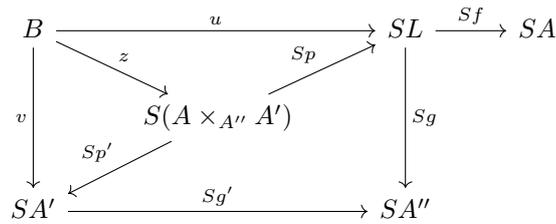


先ほど示したことから, $e\ell$ は split epi であるから, e は split epi かつ regular mono である. よって e は iso なので, $k = h$.

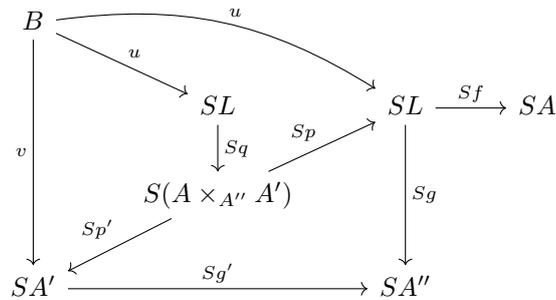
最後に下の図式が与えられたときに, これを対角に埋める $h: A \rightarrow A'$ の存在を示そう.



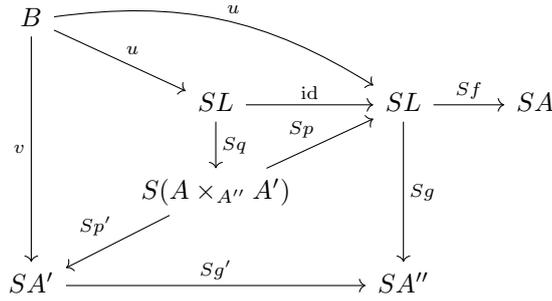
この図式の pullback をとる.



この $B \xrightarrow{z} S(A \times_{A''} A') \xrightarrow{S(fp)} SA$ は w の分解を与えているので, u は z を factorize する.



いま、一意性から L の endo morphism pq は id である。



よって、 $p'q$ が対角に埋める射として存在する。 □

3 余談

Paré [Par90] によると、次が成り立つ。

Theorem 3.1. \mathcal{I} を圏とする。Wide pullback を持つ任意の圏が I からの関手の limit を保つことと、 \mathcal{I} が connected かつ simply connected であることは同値である。ただし simply connected とは、groupoid の圏 \mathbf{Gpd} から \mathbf{Cat} への inclusion の左随伴を $\pi_1: \mathbf{Cat} \rightarrow \mathbf{Gpd}$ としたとき*4, $\pi_1(\mathcal{I})$ が terminal category $\mathbb{1}$ と圏同値であることをいう。

nLab によると、こういうのもあるらしい。

Theorem 3.2 ([nLa24a]). 圏 \mathcal{C} が complete なとき、関手 $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ が wide pullback を持つことと connected limit を保つことは同値である。*5

参考文献

- [nLa24a] nLab authors. “connected limit.” <https://ncatlab.org/nlab/show/connected+limit>, 2024. Revision 14.
- [nLa24b] nLab authors. “wide pullback.” <https://ncatlab.org/nlab/show/wide+pullback>, 2024. Revision 34.
- [Par90] R. Paré. “Simply Connected Limits.” *Canadian Journal of Mathematics*, 1990. vol. 42(4):pp. 731–746. doi: 10.4153/CJM-1990-038-6.
- [Tay89] P. Taylor. “Quantitative Domains, Groupoids and Linear Logic.” In: D. H. Pitt, D. E. Rydeheard, P. Dybjer, A. M. Pitts, and A. Poigné, eds., *Category Theory and Computer Science, Manchester, UK, September 5-8, 1989, Proceedings*. Springer, *Lecture Notes in Computer Science*, vol. 389, pp. 155–181. doi: 10.1007/BFB0018351.

*4 形式的に逆射を足して groupoid にする関手

*5 圏 \mathcal{D} は locally small が必要らしいが、本稿では圏は locally small を仮定しているので触れていない。